Πανεπιστήμιο Κύπρου
Τμήμα Μαθηματικών
και Στατιστικής

ΜΑΣ 471 - ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΣΥΝΗΘΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

ΤΕΛΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ

18 Μαΐου 2012

Εαρινό Εξάμηνο 2011-12

ΟΝΟΜΑ :

Άσκηση	1	2	3	Βαθμός
Μονάδες				

1. Θεωρούμε τη μέθοδο (Μονάδες 10)

$$Y_{n+1} = Y_n + \frac{h}{6}\left[5f(x_n, Y_n) + f(x_{n+1}, Y_{n+1})\right], \qquad 0 \leq \vartheta \leq 1,$$

για την επίλυση του προβλήματος αρχικών τιμών $y' = f(x, y),\ y(a) = A$.

(i) Να βρεθεί το τοπικό σφάλμα αποκοπής της μεθόδου.

(ii) Να μελετηθεί η σύγκλιση της μεθόδου.

(iii) Να διερευνηθεί η ευστάθεια της ανωτέρω μεθόδου σε σχέση με την εξίσωση $y' = \lambda y,\ \lambda < 0$.

2. Θεωρούμε τη μέθοδο Runge-Kutta (Μονάδες 10)

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_n, Y_n) \\ k_2 &= hf(x_n + \frac{2}{3}h, Y_n + \frac{2}{3}k_1) \\ Y_{n+1} &= Y_n + \frac{1}{4}(k_1 + 3k_2) \end{aligned}$$

για την επίλυση του προβλήματος αρχικών τιμών $y' = f(x, y),\ y(a) = A$.

(i) Να βρεθεί το τοπικό σφάλμα αποκοπής της μεθόδου.

(ii) Να διερευνηθεί η ευστάθεια της ανωτέρω μεθόδου σε σχέση με την εξίσωση $y' = \lambda y,\ \lambda < 0$.

(iii) Θεωρούμε την ανωτέρω μέθοδο για την επίλυση του προβλήματος αρχικών τιμών $y' = 2x,\ y(0) = 0$. Εξετάζοντας το αντίστοιχο πρόβλημα αρχικών τιμών για εξισώσεις διαφορών, να βρεθεί το σφάλμα στα σημεία του πλέγματος $x_n = nh$.

3. (Μονάδες 10)

(i) Δίδεται το πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$y'' + y = 1, \quad x \in [0, 1], \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 1. \tag{1}$$

(α΄) Αν $x_j = jh,\ j = 0, 1, 2, 3$ όπου $h = \frac{1}{3}$, να δοθεί το αντίστοιχο πρόβλημα διαφορών συνοριακών τιμών.

(β΄) Να δοθεί το σύστημα που προκύπτει.

(γ΄) Να βρεθεί το σφάλμα στα σημεία του πλέγματος.

(ii) Αντι του προβλήματος (1) θεωρούμε το πρόβλημα

$$y^{iv} = 0, \quad x \in [0, 1], \quad y(0) = y'(0) = 0, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 3. \tag{2}$$

(α΄) Αν $x_j = jh,\ j = -1, 0, 1, 2, 3, 4$ όπου $h = \frac{1}{3}$, να δοθεί το αντίστοιχο πρόβλημα διαφορών συνοριακών τιμών.

(β΄) Να δοθεί το σύστημα που προκύπτει.

(γ΄) Να βρεθεί το σφάλμα στα σημεία του πλέγματος.