



Πανεπιστήμιο Κύπρου
Τμήμα Μαθηματικών
και Στατιστικής

ΜΑΣ 471 - ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΣΥΝΗΘΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

ΤΕΛΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ

24 Μαΐου 2014

Εαρινό Εξάμηνο 2013-14

ΟΝΟΜΑ :

Άσκηση	1	2	3	Βαθμός
Μονάδες				

1. Δίδεται το πρόβλημα αρχικών τιμών (Μονάδες 10)

$$\mathbf{y}' = A \mathbf{y} + \mathbf{g}(x), \quad x > 0, \quad \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0. \quad (1)$$

(α') Να δειχθεί ότι οι ακόλουθες μέθοδοι για την αριθμητική επίλυση του προβλήματος (1) συγκλίνουν

(i) Η άμεση μέθοδος του Euler

(ii) Η μέθοδος του κανόνα του τραπεζίου

(β') Δίδεται το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y'' - 2y' + y = 0, \quad y(0) = y'(0) = 1. \quad (2)$$

(i) Να βρεθεί η ακριβής λύση του προβλήματος (2).

(ii) Να μετατραπεί το πρόβλημα (2) στην μορφή του προβλήματος (1).

(iii) Να υπολογισθούν τα \mathbf{y}_1 που προκύπτουν από την εφαρμογή της άμεσης μεθόδου του Euler και της μεθόδου του κανόνα του τραπεζίου στο πρόβλημα (2) (στην μορφή (1)).

2. Να δοθεί ο γενικός τύπος μεθόδου κ -βημάτων (Μονάδες 10)
για την αριθμητική επίλυση του προβλήματος αρχικών τιμών $y' = f(x, y)$, $y(a) = \alpha$.

(i) Να δοθεί ο τύπος για το τοπικό σφάλμα αποκοπής για την ανωτέρω μέθοδο.

(ii) Ποιές συνθήκες πρέπει να ικανοποιούνται για να είναι μία μέθοδος συνεπής; Πότε λέμε ότι μία μέθοδος είναι μηδέν ευσταθής;

(iii) Πότε λέμε ότι μία μέθοδος είναι ευσταθής (σε σχέση με την εξίσωση $y' = \lambda y$, $\lambda < 0$);

(iv) Δίδεται η τριβηματική μέθοδος

$$Y_{n+1} - Y_{n-2} = \frac{3h}{8} [f(x_{n+1}, Y_{n+1}) + 3f(x_n, Y_n) + 3f(x_{n-1}, Y_{n-1}) + f(x_{n-2}, Y_{n-2})].$$

(α') Να βρεθεί η τάξη της μεθόδου.

(β') Να εξετασθεί κατά πόσον η ανωτέρω μέθοδος είναι μηδέν ευσταθής.

(γ') Να εξετασθεί κατά πόσον η ανωτέρω μέθοδος συγκλίνει.

3. (Μονάδες 10)

(i) Δίδεται το πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$y'' + 2y' + y = x + 2, \quad x \in [0, 1], \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1. \quad (3)$$

(α') Αν $x_j = jh$, $j = 0, 1, 2, 3$ όπου $h = \frac{1}{3}$, να δοθεί το αντίστοιχο πρόβλημα διαφορών συνοριακών τιμών.

(β') Να δοθεί το σύστημα που προκύπτει.

(γ') Να βρεθεί το σφάλμα στα σημεία του πλέγματος.

(ii) Αντί του προβλήματος (3) θεωρούμε το πρόβλημα

$$y'' + 2y' + y = x + 2, \quad x \in [0, 1], \quad y(0) = 0, \quad y'(1) = 1. \quad (4)$$

(α') Αν $x_j = jh$, $j = 0, 1, 2, 3, 4$ όπου $h = \frac{1}{3}$, να δοθεί το αντίστοιχο πρόβλημα διαφορών συνοριακών τιμών.

(β') Να δοθεί το σύστημα που προκύπτει.

(γ') Να βρεθεί το σφάλμα στα σημεία του πλέγματος.