



Πανεπιστήμιο Κύπρου
Τμήμα Μαθηματικών
και Στατιστικής

ΜΑΣ 471 - ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΣΥΝΗΘΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

ΤΕΛΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ

23 Μαΐου 2016

Εαρινό Εξάμηνο 2015-16

ΟΝΟΜΑ :

Άσκηση	1	2	3	Βαθμός
Μονάδες				

1. Θεωρούμε τη μέθοδο

(Μονάδες 10)

$$Y_{n+1} = Y_n + h \{ \alpha f(x_n, Y_n) + \beta f(x_{n+1}, Y_{n+1}) \}, \text{ όπου } \alpha + \beta = 1, 0 \leq \alpha, \beta \leq 1, \alpha \neq \beta,$$

για την επίλυση του προβλήματος αρχικών τιμών $y' = f(x, y)$, $y(a) = y_0$.

(α') Για την ανωτέρω μέθοδο:

(i) Να βρεθεί το τοπικό σφάλμα αποκοπής.

(ii) Να διερευνηθεί η σύγκλιση.

(iii) Να διερευνηθεί η ευστάθεια της σε σχέση με την εξίσωση

$$y' = \lambda y, \lambda < 0.$$

(β') Να εφαρμοσθεί η διανυσματική μορφή της ανωτέρω μεθόδου στο πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$y'' - y = x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -1, \quad (1)$$

και να βρεθούν τα σφάλματα για το y και το y' στα σημεία $x_1 = h$ και $x_2 = 2h$.

2. Θεωρούμε τη μέθοδο Runge-Kutta

(Μονάδες 10)

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_n, Y_n) \\ k_2 &= hf(x_n + \gamma h, Y_n + \delta k_1) \\ Y_{n+1} &= Y_n + A_1 k_1 + A_2 k_2. \end{aligned}$$

για την επίλυση του προβλήματος αρχικών τιμών $y' = f(x, y)$, $y(a) = y_0$.

(α') Να βρεθούν οι σχέσεις μεταξύ των γ , δ , A_1 και A_2 ούτως ώστε το τοπικό σφάλμα αποκοπής της μεθόδου να ελαχιστοποιείται. Ποία είναι η βέλτιστη τάξη της μεθόδου;

(β') Στην περίπτωση που $A_2 = 1$ να εφαρμοσθεί η διανυσματική μορφή της ανωτέρω μεθόδου Runge-Kutta στο πρόβλημα αρχικών τιμών (1) και να βρεθούν τα σφάλματα για το y και το y' στα σημεία $x_1 = h$ και $x_2 = 2h$.

3.

(Μονάδες 10)

(i) Δίδεται το πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$y'' + y' + y = x^2 + 2x + 2, \quad x \in [0, 1], \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1. \quad (2)$$

(α') Αν $x_j = jh$, $j = 0, 1, 2, 3, 4$ όπου $h = \frac{1}{4}$, να δοθεί το αντίστοιχο πρόβλημα διαφορών συνοριακών τιμών που προκύπτει από προσεγγίσεις πεπερασμένων διαφορών.

(β') Να δοθεί το σύστημα που προκύπτει.

(γ') Να βρεθεί το σφάλμα στα σημεία του πλέγματος.

(ii) Αντί του προβλήματος (2) θεωρούμε το πρόβλημα

$$y'' = 6, \quad x \in [0, 1], \quad y'(0) = 0, \quad y(1) = 3. \quad (3)$$

(α') Αν $x_j = jh$, $j = -1, 0, 1, 2, 3, 4$ όπου $h = \frac{1}{4}$, να δοθεί το αντίστοιχο πρόβλημα διαφορών συνοριακών τιμών που προκύπτει από προσεγγίσεις πεπερασμένων διαφορών.

(β') Να δοθεί το σύστημα που προκύπτει.

(γ') Να βρεθεί το σφάλμα στα σημεία του πλέγματος.