Πανεπιστήμιο Κύπρου
Τμήμα Μαθηματικών
και Στατιστικής

ΜΑΣ 471 - ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΣΥΝΗΘΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

ΤΕΛΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ

11 Μαΐου 2018

Εαρινό Εξάμηνο 2017-18

ΟΝΟΜΑ :

Άσκηση	1	2	3	Βαθμός
Μονάδες				

1. (Μονάδες 10)

(i) Να δοθούν οι τύποι των τριών μονοβηματικών μεθόδων (άμεση Euler, έμμεση Euler, Μέθοδος του κανόνα του τραπεζίου) για την επίλυση του προβλήματος αρχικών τιμών

$$\boldsymbol{y}' = A\,\boldsymbol{y} + \boldsymbol{g}(x), \qquad \boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{\alpha}, \tag{1}$$

όπου A σταθερός $N \times N$ πίνακας.

(ii) Να βρεθούν τα τοπικά σφάλματα αποκοπής των μεθόδων όταν αυτές εφαρμόζονται στο πρόβλημα αρχικών τιμών (1).

(iii) Να αποδειχθεί ότι η μέθοδος του κανόνα του τραπεζίου συγκλίνει.

(iv) Θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y'' - 2y' + y = x^2 - 4x + 2, \qquad y(0) = y'(0) = 0. \tag{2}$$

Το πρόβλημα (2) να μετατραπεί σε σύστημα πρώτης τάξεως της μορφής (1).

(v) Να βρεθεί το σφάλμα (σαν συνάρτηση του h) στο σημείο $x_1 = h$ για την κάθε μέθοδο για τα y και y'.

2. Θεωρούμε τη μέθοδο Runge-Kutta (Μονάδες 10)

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_n, Y_n) \\ k_2 &= hf(x_n + \frac{4}{7}h, Y_n + \frac{4}{7}k_1) \\ Y_{n+1} &= Y_n + \frac{1}{8}\,(k_1 + 7k_2) \end{aligned}$$

για την επίλυση του προβλήματος αρχικών τιμών $y' = f(x, y),\ y(a) = y_0$.

(i) Να βρεθεί το τοπικό σφάλμα αποκοπής της μεθόδου.

(ii) Βρίσκοντας φράγμα για το ολικό σφάλμα να διερευνηθεί η σύγκλιση της ανωτέρω μεθόδου.

(iii) Να διερευνηθεί η ευστάθεια της ανωτέρω μεθόδου σε σχέση με την εξίσωση $y' = \lambda y,\ \lambda < 0$.

(iv) Θεωρούμε την ανωτέρω μέθοδο για την επίλυση του προβλήματος αρχικών τιμών (2). Να βρεθεί το σφάλμα (σαν συνάρτηση του h) στο σημείο $x_1 = h$ για τα y και y'.

3. (Μονάδες 10)

(i) Δίδεται το πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x), \quad x \in [0,1], \quad y(0) = \alpha, \quad y(1) = \beta.$$

(α′) Αν $x_j = jh,\ j = 0, 1, \ldots, N$, όπου $h = \dfrac{1}{N}$, να δοθεί το αντίστοιχο πρόβλημα διαφορών συνοριακών τιμών που προκύπτει απο προσεγγίσεις πεπερασμένων διαφορών.

(β′) Να δειχθεί ότι από την ανωτέρω διακριτοποιήση λαμβάνουμε ένα σύστημα της μορφής $A\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}$, όπου ο A είναι τριδιαγώνιος πίνακας. Να δοθούν τα στοιχεία του πίνακα A και του διανύσματος $\boldsymbol{b}$ σαν συναρτήσεις των $h, \alpha, \beta, p(x_i), q(x_i)$ και $r(x_i),\ i = 1, \ldots, N-1$.

(ii) Δίδεται το πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$y'' - 2y' + y = x^3 - 6x^2 + 6x, \quad x \in [0,1], \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1.$$

(α′) Αν $x_j = jh,\ j = 0, 1, 2, 3, 4$, όπου $h = \dfrac{1}{4}$, να δοθεί το αντίστοιχο πρόβλημα διαφορών συνοριακών τιμών που προκύπτει απο προσεγγίσεις πεπερασμένων διαφορών.

(β′) Να δοθεί το σύστημα που προκύπτει.

(γ′) Να βρεθεί το σφάλμα στα σημεία του πλέγματος με ακρίβεια πέντε δεκαδικών ψηφίων.