

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ
ΣΥΝΗΘΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ
ΜΑΣ 471

Σημειώσεις διαλέξεων

Α. ΚΑΡΑΓΩΡΓΗΣ
ΛΕΥΚΩΣΙΑ 2018

© 2018 Ανδρέας Καραγιώργης.

Όλα τα δικαιώματα διατηρούνται. Το παρόν έργο δεν επιτρέπεται να ανατυπωθεί μερικώς ή εξ ολοκλήρου άνευ γραπτής αδείας του συγγραφέως.

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	1
1.1	Διαφορικές εξισώσεις και συνθήκες	1
1.2	Γραμμικές και μη-γραμμικές διαφορικές εξισώσεις	3
1.3	Υπαρξη και μοναδικότητα	4
1.4	Μαθηματικές και αριθμητικές μέθοδοι επίλυσης	5
1.5	Εξισώσεις διαφορών	6
2	Ανάλυση ευαισθησίας λύσεως	11
2.1	Εισαγωγή	11
2.2	Απλό παράδειγμα ευαισθησίας λύσης	12
2.3	Εξισώσεις μεταβολών	12
2.4	Εγγενής αστάθεια γραμμικών εξισώσεων διαφορών: Προβλήματα αρχικών τιμών	13
2.4.1	Προβλήματα πρώτης τάξεως	13
2.4.2	Ομογενή προβλήματα δευτέρας τάξεως	14
2.4.3	Μη-ομογενή προβλήματα δευτέρας τάξεως	15
2.4.4	Αναδιατύπωση προβλήματος	15
2.5	Εγγενής αστάθεια προβλημάτων αρχικών τιμών για γραμμικές διαφορικές εξισώσεις	16
2.6	Εγγενής αστάθεια: Προβλήματα συνοριακών τιμών	17
3	Προβλήματα Αρχικών Τιμών: Μονοηηματικές Μέθοδοι	21
3.1	Εισαγωγή	21
3.2	Τρεις μονοηηματικές μέθοδοι	21
3.2.1	Η άμεση μέθοδος του Euler	21
3.2.2	Η έμμεση μέθοδος του Euler	22
3.2.3	Η μέθοδος του κανόνα του τραπεζίου	22
3.3	Ανάλυση σφάλματος	23
3.3.1	Τοπικό σφάλμα αποκοπής	23
3.3.2	Ολικό σφάλμα	24
3.4	Επαγωγική αστάθεια: Μερική αστάθεια	28
3.5	Συστήματα εξισώσεων	31
3.6	Βελτίωση της ακριβείας	33
3.6.1	Αναβεβλημένη προσέγγιση της λύσης	33
3.7	Ακριβέστερες μονοηηματικές μέθοδοι	34
3.7.1	Η μέθοδος του αναπτύγματος Taylor	35
3.7.2	Μέθοδοι Runge-Kutta	36

4	Προβλήματα Αρχικών Τιμών - Πολυβηματικές Μέθοδοι	43
4.1	Εισαγωγή	43
4.2	Πολυβηματικοί τύποι πεπερασμένων διαφορών	43
4.3	Σύγκλιση, συνέπεια και μηδέν ευστάθεια	45
4.4	Μερική αστάθεια	46
4.4.1	Κλασσικές πολυβηματικές μέθοδοι	48
4.4.2	Μέθοδοι Adams-Bashforth	48
4.4.3	Μέθοδοι BDF	49
4.4.4	Μέθοδοι Adams-Moulton	49
4.5	Μέθοδοι πρόβλεψης-διόρθωσης	50
4.6	Εκτίμηση σφάλματος και επιλογή βήματος	51
4.7	Αρχικές τιμές για τις πολυβηματικές μεθόδους	52
4.8	Αλλαγή του μήκους του βήματος	52
5	Αριθμητική Επίλυση Προβλημάτων Συνοριακών Τιμών	55
5.1	Εισαγωγή	55
5.2	Η μέθοδος βολής για γραμμικά προβλήματα	57
5.3	Η μέθοδος βολής για μη-γραμμικά προβλήματα	59
5.4	Η μέθοδος βολής για προβλήματα ιδιοτιμών και προβλήματα ελεύθερου συνόρου	62
5.5	Επαγωγική αστάθεια μεθόδων βολής	64
5.5.1	Βολή στην αντίθετη κατεύθυνση	64
5.5.2	Εξίσωση σε ενδιάμεσο σημείο	64
5.5.3	Μέθοδος πολλαπλών βολών	65
5.6	Μέθοδοι πεπερασμένων διαφορών για προβλήματα συνοριακών τιμών	65
5.6.1	Προβλήματα δευτέρας τάξεως	65
5.6.2	Προβλήματα τετάρτης τάξεως	67
6	Προγράμματα	71
6.1	Κεφάλαιο 1	71
6.1.1	Πρόγραμμα 1: Υπολογιστικό Παράδειγμα 1.	71
6.1.2	Πρόγραμμα 2: Υπολογιστικό Παράδειγμα 1, αντίστοιχο πρόβλημα συνοριακών τιμών.	72
6.1.3	Πρόγραμμα 3: Υπολογιστικό Παράδειγμα 2.	73
6.1.4	Πρόγραμμα 4: Άσκηση 8.	74
6.2	Κεφάλαιο 2	75
6.2.1	Πρόγραμμα 1: Υπολογιστικό Παράδειγμα 1.	75
6.2.2	Πρόγραμμα 2: Υπολογιστικό Παράδειγμα 2.	76
6.2.3	Πρόγραμμα 3: Υπολογιστικό Παράδειγμα 3.	77
6.2.4	Πρόγραμμα 4: Υπολογιστικό Παράδειγμα 4.	78
6.2.5	Πρόγραμμα 5: Υπολογιστικό Παράδειγμα 5.	79
6.3	Κεφάλαιο 3	80
6.3.1	Πρόγραμμα 1: Άμεση Μέθοδος του Euler: Υπολογιστικό Παράδειγμα 1.	80
6.3.2	Πρόγραμμα 2: Έμμεση Μέθοδος του Euler: Υπολογιστικό Παράδειγμα 1.	81
6.3.3	Πρόγραμμα 3: Μέθοδος του Κανόνα του Τραπεζίου: Υπολογιστικό Παράδειγμα 1.	82
6.3.4	Πρόγραμμα 4: Άμεση Μέθοδος του Euler: Υπολογιστικό Παράδειγμα 2.	83
6.3.5	Πρόγραμμα 5: Έμμεση Μέθοδος του Euler: Υπολογιστικό Παράδειγμα 2.	84
6.3.6	Πρόγραμμα 6: Μέθοδος του Κανόνα του Τραπεζίου: Υπολογιστικό Παράδειγμα 2.	85

6.3.7	Πρόγραμμα 7: Μέθοδος του αναπτύγματος Taylor τρίτης/τετάρτης τάξεως: Υπολογιστικό Παράδειγμα 1.	86
6.3.8	Πρόγραμμα 8: Μέθοδος Runge-Kutta δευτέρας τάξεως: Υπολογιστικό Παράδειγμα 1.	87
6.3.9	Πρόγραμμα 9: Κλασσική μέθοδος Runge-Kutta τετάρτης τάξεως: Υπολογιστικό Παράδειγμα 1.	88
6.4	Κεφάλαιο 4	89
6.4.1	Πρόγραμμα 1: Υπολογιστικό Παράδειγμα 1.	89
6.4.2	Πρόγραμμα 2: Υπολογιστικό Παράδειγμα 2.	90
6.4.3	Πρόγραμμα 3: Μέθοδος Adams - Bashforth: Υπολογιστικό Παράδειγμα 3(ι).	91
6.4.4	Πρόγραμμα 4: Μέθοδος Adams - Bashforth: Υπολογιστικό Παράδειγμα 3(ιι).	92
6.4.5	Πρόγραμμα 5: Μέθοδος BDF: Υπολογιστικό Παράδειγμα 4.	93
6.4.6	Πρόγραμμα 6: Μέθοδος Adams - Moulton: Υπολογιστικό Παράδειγμα 5.	94

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Διαφορικές εξισώσεις και συνθήκες

Ένα απλό παράδειγμα συνήθους διαφορικής εξίσωσης είναι η εξίσωση της μορφής

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

όπου η f είναι δοθείσα συνάρτηση των x και y .

Για παράδειγμα, $f(x, y) = x^5 + e^{\cos x} \tan y$.

Ο σκοπός μας είναι, από τη διαφορική εξίσωση και από άλλες πληροφορίες που σχετίζονται μ'αυτήν να προσδιορίσουμε τη λύση $y = g(x)$. Σ'αυτή, η εξαρτώμενη μεταβλητή y εκφράζεται σαν συνάρτηση της ανεξάρτητης μεταβλητής x .

Το ζεύγος

$$\frac{dy_1}{dx} = a_1(x) y_1 + b_1(x) y_2 + c_1(x)$$

$$\frac{dy_2}{dx} = a_2(x) y_1 + b_2(x) y_2 + c_2(x)$$

είναι σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων.

Οι πιο πάνω διαφορικές εξισώσεις είναι πρώτης τάξεως αφού η πρώτη είναι η υψηλότερας τάξεως παράγωγος που εμφανίζεται. Μια αντίστοιχη συνήθης διαφορική εξίσωση δεύτερας τάξεως έχει τη μορφή

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = f(x, y, \frac{dy}{dx}).$$

Σημειώνουμε ότι υπάρχουν διάφοροι συμβολισμοί για τις παραγώγους:

$$\frac{dy}{dx} = y', \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = y'', \quad \frac{d^3 y}{dx^3} = y''', \quad \frac{d^4 y}{dx^4} = y^{(iv)}, \quad \frac{d^5 y}{dx^5} = y^{(v)}, \dots, \quad \frac{d^{12} y}{dx^{12}} = y^{(xii)}.$$

Διαφορετικά γράφουμε $\frac{d^n y}{dx^n} = y^{(n)}$. Η πιο πάνω διαφορική εξίσωση δεύτερας τάξεως γράφεται και στη μορφή $y'' = f(x, y, y')$.

Η διαφορική εξίσωση της μορφής $y' = f(x, y)$ λέγεται *ηθεθυμένη*, ενώ η μορφή $\phi(x, y, y') = 0$ λέγεται *πεπλεγμένη*. Η δεύτερη μορφή είναι προφανώς πιο γενική. Στο μάθημα αυτό θα μας απασχολήσουν διαφορικές εξισώσεις λελυμένης μορφής.

Για να ορίζεται η λύση κατά μοναδικό τρόπο χρειαζόμαστε επιπλέον πληροφορίες που σχετίζονται με τη διαφορική εξίσωση. Για να βρούμε τη λύση μίας διαφορικής εξίσωσης τάξεως n , χρειαζόμαστε n συνθήκες.

Παράδειγμα: Η διαφορική εξίσωση τετάρτης τάξεως $y^{(iv)} = 1$ έχει γενική λύση την

$$y = \frac{x^4}{24} + A \frac{x^3}{6} + B \frac{x^2}{2} + Cx + D, \quad A, B, C, D \in \mathbb{R}.$$

Αυτό μπορούμε να το δούμε εύκολα ολοκληρώνοντας τέσσερις φορές.

Η γενική αυτή λύση περιέχει τέσσερις σταθερές. Για να τις προσδιορίσουμε χρειαζόμαστε τέσσερις συνθήκες. Προφανώς, ο προσδιορισμός των τεσσάρων μεταβλητών μας δίνει μια μοναδική λύση.

Οι πιο απλές συνθήκες σ' αυτό το παράδειγμα θα ήταν ο προσδιορισμός των τιμών των y''', y'', y' και y σε κάποιο σημείο $x = a$. Αυτό θα μας έδινε τέσσερις γραμμικές εξισώσεις για τις σταθερές A, B, C και D .

Ένα πρόβλημα στο οποίο όλες οι συνθήκες δίδονται στο ίδιο σημείο (συνήθως το αρχικό σημείο του διαστήματος που μας ενδιαφέρει) λέγεται **πρόβλημα αρχικών τιμών**. Οι συνθήκες λέγονται **αρχικές συνθήκες**.

Ένα χαρακτηριστικό των προβλημάτων αρχικών τιμών είναι ότι αν όλες οι παράγωγοι του y είναι πεπερασμένες στο σημείο $x = a$, τότε μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε την τιμή του y στο σημείο $x = a + h$, όπου το h είναι μικρό, από το ανάπτυγμα Taylor

$$y(a+h) = y(a) + h y'(a) + \frac{1}{2} h^2 y''(a) + \dots$$

Για παράδειγμα, στην εξίσωση δευτέρας τάξεως $y'' = f(x, y, y')$, ο προκαθορισμός των τιμών των y και y' στο $x = a$ μας δίνει αμέσως το $y''(a)$. Επίσης, παραγωγίζοντας τη διαφορική εξίσωση έχουμε

$$y''' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial f}{\partial y'} y'',$$

και όλες οι ποσότητες στο δεξιό μέρος είναι γνωστές στο $x = a$.

Όταν οι συνθήκες δεν δίδονται όλες στο ίδιο σημείο, τότε το πρόβλημα λέγεται **πρόβλημα συνοριακών τιμών** και οι συνθήκες λέγονται **συνοριακές συνθήκες**. Συνήθως οι συνθήκες δίδονται στο αρχικό και το τελικό σημείο του διαστήματος που μας ενδιαφέρει (δηλαδή στο σύνορο του διαστήματος).

Για την εξίσωση $y'' = f(x, y, y')$ οι πιο απλές συνοριακές συνθήκες είναι οι

$$y(a) = \mu, \quad y(b) = \nu,$$

όπου οι μ και ν είναι δοσμένοι αριθμοί. Πιο γενικά θα μπορούσαμε να έχουμε

$$\alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = \mu, \quad \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = \nu$$

ή ακόμη και

$$\alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) + \alpha_2 y(b) + \alpha_3 y'(b) = \mu, \quad \beta_0 y(a) + \beta_1 y'(a) + \beta_2 y(b) + \beta_3 y'(b) = \nu.$$

Οι συνθήκες στις δύο πρώτες περιπτώσεις λέγονται *διαχωρισμένες* σε αντίθεση προς τη τρίτη περίπτωση όπου λέγονται *μη-διαχωρισμένες*.

Στην περίπτωση του συστήματος

$$y_1' = a_1(x) y_1 + b_1(x) y_2 + c_1(x)$$

$$y_2' = a_2(x) y_1 + b_2(x) y_2 + c_2(x)$$

οι διαχωρισμένες συνθήκες είναι της μορφής

$$\alpha_0 y_1(a) + \alpha_1 y_2(a) = \mu, \quad \beta_0 y_1(b) + \beta_1 y_2(b) = \nu$$

ενώ οι μη-διαχωρισμένες συνθήκες είναι της μορφής

$$\alpha_0 y_1(a) + \alpha_1 y_2(a) + \alpha_2 y_1(b) + \alpha_3 y_2(b) = \mu, \quad \beta_0 y_1(a) + \beta_1 y_2(a) + \beta_2 y_1(b) + \beta_3 y_2(b) = \nu.$$

Για εξισώσεις τρίτης τάξεως θα μπορούσαμε να έχουμε από μία συνθήκη σε τρία διαφορετικά σημεία αλλά συνήθως έχουμε δύο συνθήκες σε ένα σημείο και μία σε άλλο σημείο.

Προφανώς μία εξίσωση πρώτης τάξεως οδηγεί υποχρεωτικά σε πρόβλημα αρχικών τιμών.

1.2 Γραμμικές και μη-γραμμικές διαφορικές εξισώσεις

Η γενική μορφή γραμμικής διαφορικής εξισώσεως n -τάξεως είναι

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \dots + a_1(x) y' + a_0(x) y = f(x).$$

Η γενική μορφή γραμμικής διαφορικής εξισώσεως δευτέρας τάξεως είναι

$$y'' + a_1(x) y' + a_0(x) y = f(x),$$

και για την επίλυση της εξετάζουμε την *ομογενή* εξίσωση

$$y'' + a_1(x) y' + a_0(x) y = 0.$$

Αυτή έχει δύο γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις y_1 και y_2 , και η **γενική λύση** της ομογενούς εξισώσεως είναι η

$$y_c(x) = A y_1(x) + B y_2(x)$$

όπου οι A και B είναι αυθαίρετες σταθερές.

Η λύση αυτή (η y_c) λέγεται **συμπληρωματική συνάρτηση** της (μη-ομογενούς) εξισώσεως.

Οποιαδήποτε λύση y_p της μη-ομογενούς εξισώσεως λέγεται **ειδική λύση** και η **γενική λύση** της μη-ομογενούς εξισώσεως δίδεται από την

$$y(x) = y_p(x) + y_c(x) = y_p(x) + A y_1(x) + B y_2(x),$$

όπου οι τιμές των A και B βρίσκονται από τις συνθήκες.

Παράδειγμα: Έστω το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y'' - y = 1, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

Η συμπληρωματική συνάρτηση είναι η $y_c(x) = Ae^x + Be^{-x}$ και μία ειδική λύση η $y_p(x) = -1$. Η γενική λύση είναι η $y(x) = -1 + Ae^x + Be^{-x}$, όπου οι αρχικές συνθήκες ικανοποιούν τις $A + B = 1$ και $A - B = 1$, δηλαδή $A = 1$ και $B = 0$.

Παράδειγμα: Για την εξίσωση τετάρτης τάξεως $y^{(iv)} = 1$ οι ανεξάρτητες λύσεις είναι οι

$$y_1(x) = 1, y_2(x) = x, y_3(x) = x^2, y_4(x) = x^3,$$

και μία ειδική λύση η $y_p(x) = \frac{1}{24}x^4$.

Στις μη-γραμμικές διαφορικές εξισώσεις, η y ή κάποιες παράγωγοί της δεν εμφανίζονται πλέον μόνο γραμμικά.

Επίσης, δεν υφίστανται πλέον οι έννοιες της αντιστοίχου ομογενούς εξισώσεως ή της συμπληρωματικής συνάρτησης.

Παράδειγμα: Η λύση της μη-γραμμικής εξίσωσης $y' = x^3 y^2$ είναι η $y = -\frac{4}{x^4 + A}$ όπου το A είναι σταθερά.

Παράδειγμα: Η λύση της $y' = \frac{y-x}{y+x}$ δίδεται από την $\log(x^2 + y^2) + 2 \tan^{-1}(\frac{y}{x}) = A$.

1.3 Ύπαρξη και μοναδικότητα

Έστω ότι εξετάζουμε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y' = f(x, y), x \in [a, b], y(a) = \alpha.$$

Τότε,

Θεώρημα Αν η $f \in C([a, b] \times \mathbb{R})$ και επιπλέον ικανοποιεί τη συνθήκη του Lipschitz ως προς τη δεύτερη μεταβλητή, ομοιόμορφα ως προς την πρώτη, το πρόβλημα αρχικών τιμών έχει μοναδική λύση.

Σημείωση Η συνάρτηση $f(x, y)$ ικανοποιεί τη συνθήκη του Lipschitz ως προς τη δεύτερη μεταβλητή, ομοιόμορφα ως προς την πρώτη, αν υπάρχει L (η σταθερά Lipschitz) τέτοια ώστε

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L |y_1 - y_2| \quad \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}, x \in [a, b].$$

Παρόμοια, το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), x \in [a, b], y(a) = \alpha_0, y'(a) = \alpha_1, \dots, y^{(n-1)}(a) = \alpha_{n-1},$$

έχει μοναδική λύση αν η συνάρτηση f έχει την κατάλληλη συμπεριφορά.

Παράδειγμα: Στο πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y' = 3y^{\frac{2}{3}}, x \in [0, 1], y(0) = 0,$$

έχουμε $f(x, y) = 3y^{\frac{2}{3}}$ και

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, \xi) \right| |y_1 - y_2| = \frac{2}{\xi^{\frac{1}{3}}} |y_1 - y_2|.$$

Το $\xi^{-\frac{1}{3}}$ δεν είναι φραγμένο σε κανένα διάστημα που περιέχει το $y = 0$, δηλαδή η συνθήκη Lipschitz δεν ικανοποιείται σε τέτοιες περιοχές. Πράγματι, το πρόβλημα έχει άπειρες λύσεις:

$$y(x) = 0, x \in [0, c], y(x) = (x - c)^3, x \in [c, 1] \quad \forall c \in [0, 1].$$

Παράδειγμα: Εξετάστε το πρόβλημα αρχικών τιμών: $y' = 2\sqrt{y}$, $x \in [0, 1]$, $y(0) = 0$.

Για προβλήματα συνοριακών τιμών η κατάσταση είναι πιο περίπλοκη. Μια γραμμική εξίσωση με τον κατάλληλο αριθμό συνοριακών συνθηκών μπορεί να έχει μία, πολλές ή και καμία λύσεις.

Παράδειγμα: Η εξίσωση $y'' + y = 1$ έχει τη γενική λύση $y = 1 + A\sin x + B\cos x$.

- Οι συνθήκες $y(0) = 0$, $y(\frac{\pi}{2}) = 0$ δίνουν $A = -1$, $B = -1$ (μοναδική λύση).
- Οι συνθήκες $y(0) = 0$, $y(\pi) = 2$ δίνουν τη λύση $y = A\sin x - \cos x + 1$ που ικανοποιεί το πρόβλημα για κάθε A .
- Οι συνθήκες $y(0) = y(\pi) = 0$ δεν ικανοποιούνται από καμία λύση.

Παράδειγμα: Να βρεθούν δύο λύσεις του προβλήματος συνοριακών τιμών

$$y'' + y = 1, \quad y'(0) = (y(0))^2, \quad y(\frac{3\pi}{2}) = 0.$$

(Απάντηση: $y = 1 + \sin x$, $y = 1 + \sin x - 2\cos x$.)

1.4 Μαθηματικές και αριθμητικές μέθοδοι επίλυσης

Στην αριθμητική επίλυση μίας διαφορικής εξίσωσης ο σκοπός μας είναι η εύρεση αριθμητικών τιμών του y για συγκεκριμένες τιμές του x .

Η παρουσίαση της λύσης μπορεί να γίνει ως εξής:

- Με πίνακα που να περιέχει συγκεκριμένες τιμές του x με τις αντίστοιχες υπολογισμένες τιμές του y . Ενδιάμεσες τιμές μπορούν να βρεθούν από τον πίνακα με μεθόδους παρεμβολής.
- Με γραφική παράσταση του y ως προς το x .
- Με μία απλή (προσεγγιστική) συνάρτηση της μορφής $y = g(x)$, αν μία τέτοια απλή λύση υπάρχει.
- Με τον υπολογισμό των συντελεστών c_0, c_1, \dots, c_k σε προσέγγιση της μορφής $y = c_0 + c_1x + \dots + c_kx^k$.

Προηγουμένως δόθηκαν οι αναλυτικές λύσεις ορισμένων απλών παραδειγμάτων. Στην πράξη δυστυχώς σπάνια μπορούμε να βρούμε τέτοιες αναλυτικές λύσεις σε προβλήματα που μας ενδιαφέρουν. Επίσης, πολλές φορές ακόμη και αν βρεθεί η αναλυτική λύση, είναι τόσο περίπλοκη που δεν έχει πρακτική αξία.

Παράδειγμα: Η διαφορική εξίσωση $y' = \frac{2y}{1-x^2}$ έχει λύση την $y = A\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}e^{\tan^{-1}x}$. Για κάθε τιμή του $x \in (-1, 1)$ μπορούμε εύκολα να βρούμε την αντίστοιχη τιμή του y .

Παράδειγμα: Η διαφορική εξίσωση $y' = \frac{2y}{1-x^2} + x$ έχει λύση την

$$y = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}e^{\tan^{-1}x} \{B + \int t \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} e^{-\tan^{-1}t} dt\}.$$

Για τιμές του $x \in (-1, 1)$ η εύρεση του αντίστοιχου y είναι εξαιρετικά δύσκολη.

Σημείωση. Σε αντίθεση προς τις αναλυτικές μεθόδους, οι αριθμητικές μέθοδοι δίνουν διαφορετικές μορφές για διαφορετικές συνθήκες. Οι συνθήκες επηρεάζουν τους υπολογισμούς από την αρχή.

Σημείωση. Οι αριθμητικές μέθοδοι για την επίλυση των εξισώσεων

- $y' = \frac{2y}{1-x^4}$
- $y' = \frac{2y}{1-x^4} + x$
- Γενικότερα $y' = f(x, y)$

είναι βασικά οι ίδιες.

1.5 Εξισώσεις διαφορών

Υπάρχει μία πολύ στενή σχέση μεταξύ διαφορικών εξισώσεων και εξισώσεων διαφορών. Σε πολλές αριθμητικές μεθόδους που θα εξετάσουμε, θα λύνουμε εξισώσεις διαφορών για την εύρεση προσεγγιστικής λύσης διαφορικών εξισώσεων.

Μία εξίσωση διαφορών πρώτης τάξεως έχει τη μορφή

$$y_{n+1} + \alpha_n y_n = \beta_n, \quad n = 0, 1, \dots,$$

όπου τα α_n και β_n είναι (γνωστές) ακολουθίες. Για την εξεύρεση λύσης χρειαζόμαστε μία *αρχική συνθήκη*. Συνήθως αυτή δίδεται από το y_0 . Σ'αυτή την περίπτωση, υπολογιστικά η λύση βρίσκεται επαναληπτικά από τον τύπο

$$y_{n+1} = \beta_n - \alpha_n y_n, \quad n = 0, 1, \dots$$

Παράδειγμα: Να βρεθεί η λύση του προβλήματος: $y_{n+1} - 16 y_n = 2, \quad y_0 = 0$.

Μία εξίσωση διαφορών δευτέρας τάξεως έχει τη μορφή

$$y_{n+1} + \alpha_n y_n + \beta_n y_{n-1} = \gamma_n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

όπου τα α_n, β_n και γ_n είναι (γνωστές) ακολουθίες. Τώρα χρειαζόμαστε δύο συνθήκες. Αυτές μπορούν να είναι *αρχικές συνθήκες*, π.χ. να δίδονται τα y_0 και y_1 ή *συνοριακές συνθήκες*, π.χ. να δίδονται τα y_0 και y_{20} . Στην πρώτη περίπτωση η εξίσωση διαφορών με τις αρχικές συνθήκες αποτελούν *πρόβλημα αρχικών τιμών* ενώ στη δεύτερη, η εξίσωση διαφορών με τις συνοριακές συνθήκες αποτελούν *πρόβλημα συνοριακών τιμών*.

Η γενική λύση της

$$y_{n+1} + \alpha_n y_n + \beta_n y_{n-1} = \gamma_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

είναι μορφής ανάλογης προς την αντίστοιχη γραμμική διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως. Συγκεκριμένα, η γενική λύση γράφεται ως

$$y_n = y_n^{(p)} + A y_n^{(1)} + B y_n^{(2)}$$

όπου το $y_n^{(p)}$ είναι μία ειδική λύση και τα $y_n^{(1)}, y_n^{(2)}$ είναι δύο γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις της ομογενούς εξισώσεως διαφορών

$$y_{n+1} + \alpha_n y_n + \beta_n y_{n-1} = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

Για να βρούμε τα $y_n^{(1)}, y_n^{(2)}$, στην περίπτωση της εξίσωσης διαφορών με *σταθερούς* συντελεστές

$$y_{n+1} + \alpha y_n + \beta y_{n-1} = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

δοκιμάζουμε λύσεις της μορφής $y_n^{(1)} = m_1^n$ και $y_n^{(2)} = m_2^n$. Αυτό δίνει την *χαρακτηριστική εξίσωση*

$$m^2 + \alpha m + \beta = 0,$$

εκ της οποίας προσδιορίζονται τα m_1 και m_2 . Στην περίπτωση που $m_1 = m_2 = m$ το $y_n^{(2)} = n m^n$.

Παράδειγμα: Να βρεθεί η λύση του προβλήματος: $y_{n+2} - a^2 y_n = a^n$, $y_0 = 0$, $y_1 = 0$.

Υπολογιστικά, η επίλυση του προβλήματος αρχικών τιμών

$$y_{n+1} + \alpha_n y_n + \beta_n y_{n-1} = \gamma_n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$y_0 = \mu, \quad y_1 = \nu,$$

είναι πολύ εύκολη. Απλά χρησιμοποιούμε τον αναδρομικό τύπο

$$y_{n+1} = \gamma_n - \alpha_n y_n - \beta_n y_{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots$$

με τον οποίο μπορούμε να βρούμε διαδοχικά τα y_2, y_3 κ.λ.π.

Υπολογιστικά, η επίλυση του αντιστοίχου προβλήματος συνοριακών τιμών (με γνωστά τα y_0 και y_N , για παράδειγμα) δίνει τριδιαγώνιο σύστημα $N - 1$ γραμμικών εξισώσεων με $N - 1$ αγνώστους y_1, y_2, \dots, y_{N-1} , της μορφής

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \beta_2 & \alpha_2 & 1 & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \beta_{N-2} & \alpha_{N-2} & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & \beta_{N-1} & \alpha_{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{N-2} \\ y_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_1 - \beta_1 y_0 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_{N-2} \\ \gamma_{N-1} - y_N \end{bmatrix}.$$

Υπολογιστικό Παράδειγμα 1: Στο πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y_{n+1} - \frac{9}{4} y_n + \frac{1}{2} y_{n-1} = 0, \quad y_0 = \frac{4}{3}, \quad y_1 = \frac{1}{3},$$

η χαρακτηριστική εξίσωση είναι $m^2 - \frac{9}{4} m + \frac{1}{2} = 0$, που δίνει $m_{1,2} = 2, \frac{1}{4}$. Η γενική λύση είναι $y_n = A 2^n + B \frac{1}{4^n}$. Από τις αρχικές συνθήκες, έχουμε ότι $A = 0$, $B = \frac{4}{3}$, επομένως η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών είναι η $y_n = \frac{4}{3} \frac{1}{4^n}$. Η λύση y_n που προκύπτει από την $y_n = \frac{4}{3} \frac{1}{4^n}$ και από την αναδρομική σχέση δίδεται στο Σχήμα 1.1.

Υπολογιστικό Παράδειγμα 2: Στο πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y_{n+4} - 2 y_{n+2} + y_n = 0, \quad y_0 = y_1 = y_2 = 0, \quad y_3 = 1,$$

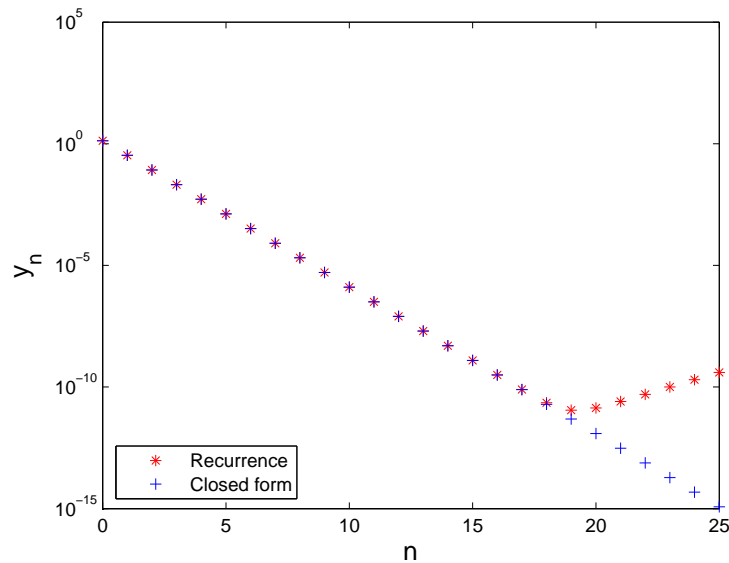
η χαρακτηριστική εξίσωση είναι $m^4 - 2m^2 + 1 = 0$, με ρίζες $m_1 = 1$ (διπλή) και $m_2 = -1$ (διπλή). Η γενική λύση είναι η

$$y_n = A 1^n + B n (1^n) + C (-1)^n + D n (-1)^n.$$

Από τις αρχικές συνθήκες, έχουμε ότι η λύση του προβλήματος είναι η

$$y_n = \frac{1}{4} (-1 + n + (1 - n) (-1)^n).$$

Η λύση y_n που προκύπτει από την ανωτέρω έκφραση και από την αναδρομική σχέση δίδεται στο Σχήμα 1.2.



Σχήμα 1.1: Η λύση του παραδείγματος 1 σε κλειστή μορφή και με την αναδρομική σχέση

Ασκήσεις

1. Δείξτε ότι το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \quad y(a) = \alpha_1, \quad y'(a) = \alpha_2, \dots, \quad y^{(n-1)}(a) = \alpha_n,$$

μπορεί να γραφεί ως πρόβλημα αρχικών τιμών για ένα σύστημα n εξισώσεων πρώτης τάξεως.

2. Από το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y^{(iv)} = 1, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = -1, \quad y''(1) = 0, \quad y'''(1) = 1,$$

γράψτε το ανάπτυγμα Taylor για το $y(1+h)$, $h > 0$. Συγκρίνετε το αποτέλεσμα με την τιμή της λύσης στο $x = 1+h$. Σχολιάστε.

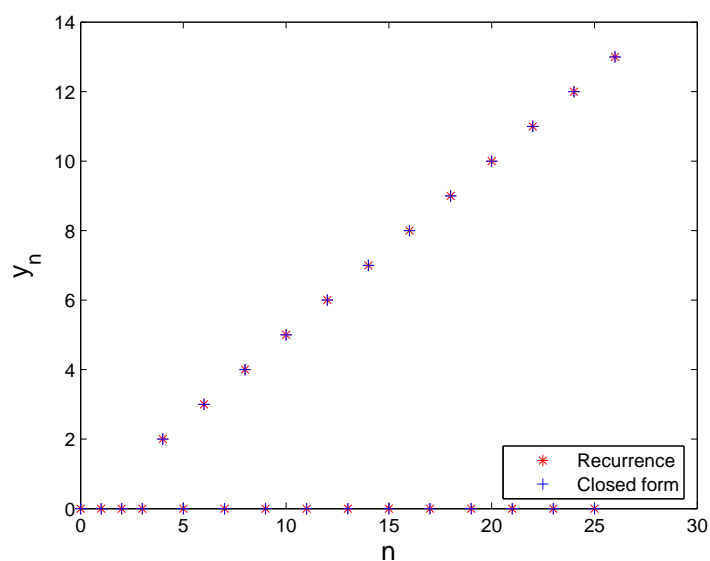
3. Βρείτε τους πρώτους πέντε όρους του αναπτύγματος Taylor στο $x = h$ για τη λύση του προβλήματος αρχικών τιμών $y' = 1 + y^2$, $y(0) = 0$.
4. Δίδεται το πρόβλημα αρχικών τιμών $y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$, με μία των αρχικών συνθηκών την $\alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = \mu$, $\alpha_1 \neq 0$. Δείξτε ότι το ανάπτυγμα Taylor της λύσης στο σημείο $x = a+h$, μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει μόνο του $y(a)$.
5. Να βρεθεί η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών

$$y''' = x + 1, \quad y(0) = y'(0) = y''(0) = 1.$$

6. Να βρεθεί η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών

$$y' = z, \quad z' = -y, \quad y(0) = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

Τι συμβαίνει όταν οι συνθήκες γίνονται $y(0) = 0$, $y(\pi) = 1$;



Σχήμα 1.2: Η λύση του παραδείγματος 2 σε κλειστή μορφή και με την αναδρομική σχέση

7. Να βρεθεί η γενική λύση της εξίσωσης διαφορών

$$y_{n+3} - 3y_{n+2} + 3y_{n+1} - y_n = 0.$$

8. Να βρεθεί η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών

$$y_{n+2} - y_{n+1} - y_n = 0, \quad y_0 = 0, \quad y_1 = \kappa, \quad \kappa > 0.$$

Να βρεθεί το όριο $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_{n+1}}{y_n}$.

9. Να επαναληφθεί η προηγούμενη άσκηση με $y_0 = 1, y_1 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})$.
10. Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y' = x^3 y^2, \quad y(0) = \frac{1}{4}.$$

Τι συμβαίνει όταν η αρχική συνθήκη είναι: (i) $y(0) = 0$, (ii) $y(0) = -1$;

Κεφάλαιο 2

Ανάλυση ευαισθησίας λύσεως

2.1 Εισαγωγή

Στα περισσότερα φυσικά προβλήματα δεν γνωρίζουμε όλα τα δεδομένα ακριβώς. Αυτά προέρχονται από μετρήσεις ή βρίσκονται πειραματικά και ως εκ τούτου δεν είναι πολύ ακριβή. Στο κεφάλαιο αυτό θα διερευνήσουμε τον τρόπο με τον οποίο αυτές οι ανακρίβειες (αβεβαιότητες) επηρεάζουν τα αποτελέσματα.

Συγκεκριμένα, αν η λύση ενός προβλήματος εξαρτάται από ένα δεδομένο c με τη σχέση $x = f(c)$, τότε μία αβεβαιότητα δc στο c θα δημιουργήσει σφάλμα μεγέθους $\delta x \approx \frac{df}{dc} \delta c$ στο x . Ο λόγος είναι ότι αν το δc είναι μικρό $f(c + \delta c) \approx f(c) + f' \delta c$. Το δc θα μπορούσε να είναι είτε αρνητικό είτε θετικό οπότε γράφουμε

$$|\delta x| \approx \left| \frac{df}{dc} \delta c \right|.$$

Όταν το x εξαρτάται από πολλά δεδομένα, το κάθε ένα από τα οποία έχει μία μικρή ανακρίβεια, τότε έχουμε κάτι το ανάλογο.

Αν για παράδειγμα

$$x = f(a, b, c),$$

τότε

$$\delta x \approx \frac{\partial f}{\partial a} \delta a + \frac{\partial f}{\partial b} \delta b + \frac{\partial f}{\partial c} \delta c$$

ή

$$|\delta x| \leq \left| \frac{\partial f}{\partial a} \delta a \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial b} \delta b \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial c} \delta c \right|.$$

Οι σημαντικές ποσότητες στις πιο πάνω σχέσεις είναι οι παράγωγοι που πολλαπλασιάζουν τα δεδομένα για να δώσουν την ανακρίβεια στη λύση. Ο προσδιορισμός αυτών των παραγώγων λέγεται *ανάλυση ευαισθησίας*.

Παράδειγμα: Αν το αποτέλεσμα που έχουμε για τη λύση x είναι 10.359 και το $|\delta x| \approx 0.024$, τότε το ακριβές x βρίσκεται μεταξύ των 10.335 και 10.383.

Στην πράξη αυτό που έχει περισσότερη σημασία δεν είναι η *απόλυτη αβεβαιότητα* $|\delta x|$ αλλά η *σχετική αβεβαιότητα* $\left| \frac{\delta x}{x} \right|$.

Αν η απόλυτη αβεβαιότητα είναι μικρή, λέμε ότι το πρόβλημα είναι *απολύτως εγγενώς ευσταθές*. Αντίθετα αν αυτή είναι μεγάλη, το πρόβλημα είναι *απολύτως εγγενώς ασταθές*. Αντίστοιχα, αν η σχετική αβεβαιότητα είναι μικρή ή μεγάλη, λέμε ότι το πρόβλημα είναι *σχετικώς εγγενώς ευσταθές* ή *ασταθές*.

Επίσης όταν η λύση μας εξαρτάται από πέραν του ενός δεδομένα μπορεί να έχουμε ευστάθεια ως προς ορισμένα δεδομένα και αστάθεια ως προς άλλα.

Πρέπει να τονίσουμε ότι η εγγενής αστάθεια που περιγράψαμε μέχρι στιγμής συνδέεται με το *πρόβλημα* που εξετάζουμε και είναι ανεξάρτητη της μεθόδου που χρησιμοποιούμε για να το επιλύσουμε. Αργότερα, θα μελετήσουμε αστάθειες που προέρχονται από τις μεθόδους που χρησιμοποιούμε για την επίλυση του προβλήματος. Αυτές οι αστάθειες λέγονται *επαγωγικές*.

2.2 Απλό παράδειγμα ευαισθησίας λύσης

Εξετάζουμε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y'' = -\frac{g}{(V \cos \alpha)^2}, \quad y(0) = H, \quad y'(0) = \tan \alpha$$

που περιγράφει κάποιο πρόβλημα βολής. Η λύση δίδεται από το

$$y = -\frac{gx^2}{2(V \cos \alpha)^2} + x \tan \alpha + H = f(g, V, \alpha),$$

δηλαδή η λύση εξαρτάται από τα δεδομένα g, V, α . Από το

$$\delta y \approx \frac{\partial f}{\partial g} \delta g + \frac{\partial f}{\partial V} \delta V + \frac{\partial f}{\partial \alpha} \delta \alpha,$$

έχουμε ότι στο $x = D$, που είναι το σημείο που μας ενδιαφέρει

$$\delta y \approx \frac{-D^2}{2(V \cos \alpha)^2} \delta g + \frac{gD^2}{V^3 \cos^2 \alpha} \delta V + \frac{D}{\cos^2 \alpha} \left(1 - \frac{gD \tan \alpha}{V^2}\right) \delta \alpha.$$

Για να αναλύσουμε την ευαισθησία του προβλήματος αυτού πρέπει να εξετάσουμε τη συμπεριφορά των συντελεστών των $\delta g, \delta V$ και $\delta \alpha$ στον πιο πάνω τύπο.

2.3 Εξισώσεις μεταβολών

Στο πρόβλημα αρχικών τιμών της προηγούμενης παραγράφου, μπορέσαμε να βρούμε τις παραγώγους $\frac{\partial f}{\partial g}, \frac{\partial f}{\partial V}$ και $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$ εύκολα επειδή γνωρίζαμε την αναλυτική λύση του προβλήματος. Αν δεν γνωρίζουμε τη λύση χρειάζεται να επιλύσουμε τις *εξισώσεις μεταβολών* για τις πιο πάνω μερικές παραγώγους. Συγκεκριμένα, συμβολίζοντας με y_g το $\frac{\partial y}{\partial g}$ κ.λ.π. πρέπει να λύσουμε τα προβλήματα αρχικών τιμών

- $y_g'' = -\frac{1}{(V \cos \alpha)^2}, \quad y_g(0) = 0, \quad y_g'(0) = 0,$
- $y_V'' = \frac{2g}{V^3 \cos^2 \alpha}, \quad y_V(0) = 0, \quad y_V'(0) = 0,$

και

$$\bullet y''_{\alpha} = -\frac{2g \tan \alpha}{(V \cos \alpha)^2}, \quad y_{\alpha}(0) = 0, \quad y'_{\alpha}(0) = \sec^2 \alpha.$$

Συνήθως οι πιο πάνω εξισώσεις μεταβολών επιλύονται αριθμητικά.

Παράδειγμα: Η εξίσωση μεταβολών (με την ανάλογη αρχική συνθήκη) για το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y' - y^2 = 1, \quad y(0) = \lambda,$$

ως προς το λ είναι

$$y'_{\lambda} - 2y y_{\lambda} = 0, \quad y_{\lambda}(0) = 1.$$

Παράδειγμα: Παρόμοια για το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y' - y \sin \lambda = 1, \quad y(0) = \lambda,$$

δίνει

$$y'_{\lambda} - y_{\lambda} \sin \lambda - y \cos \lambda = 0, \quad y_{\lambda}(0) = 1.$$

Σημειώστε ότι και στα δύο πιο πάνω παραδείγματα πρέπει πρώτα να λύσουμε το πρόβλημα αρχικών τιμών για το y (αριθμητικά) για να μπορέσουμε να λύσουμε το πρόβλημα μεταβολών αφού αυτό περιέχει εκτός του y_{λ} και το y .

2.4 Εγγενής αστάθεια γραμμικών εξισώσεων διαφορών: Προβλήματα αρχικών τιμών

2.4.1 Προβλήματα πρώτης τάξεως

Έστω ότι εξετάζουμε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y_{n+1} + \alpha_n y_n = \beta_n, \quad y_0 = \alpha.$$

Το σφάλμα δy_n που εισάγει στο y_n μία αβεβαιότητα $\delta \alpha$ στο α , δίδεται από το $\delta y_n \approx \frac{dy_n}{d\alpha} \delta \alpha$. Ο συντελεστής βρίσκεται από το πρόβλημα μεταβολών

$$\frac{dy_{n+1}}{d\alpha} + \alpha_n \frac{dy_n}{d\alpha} = 0, \quad \frac{dy_0}{d\alpha} = 1$$

ή με το συμβολισμό $z_n = \frac{dy_n}{d\alpha}$,

$$z_{n+1} + \alpha_n z_n = 0, \quad z_0 = 1.$$

Το z_n είναι η συμπληρωματική συνάρτηση (με $z_0 = 1$). Από την εξίσωση μεταβολών έχουμε ότι $z_1 = -\alpha_0 z_0 = -\alpha_0$, $z_2 = -\alpha_1 z_1 = \alpha_1 \alpha_0$, και γενικά

$$z_n = (-1)^n \alpha_{n-1} \alpha_{n-2} \cdots \alpha_1 \alpha_0,$$

που είναι και η ποσότητα που πολλαπλασιάζει το $\delta \alpha$.

Υπολογιστικό Παράδειγμα 1: Εξετάζουμε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y_{n+1} - 10 y_n = -\frac{3}{2} n - \frac{4}{3}, \quad y_0 = \alpha.$$

Η γενική λύση είναι η $y_n = \frac{1}{6}(n+1) + (\alpha - \frac{1}{6})10^n$. Μία αβεβαιότητα $\delta\alpha$ στο α προκαλεί αβεβαιότητα $\delta y_n \approx 10^n \delta\alpha$ στο y_n . Ακόμη και για μικρές τιμές του $\delta\alpha$, το δy_n αυξάνει πολύ γρήγορα. Όμως αυτό που μας ενδιαφέρει είναι το σχετικό σφάλμα $\frac{\delta y_n}{y_n}$. Αν το $\alpha - \frac{1}{6} \neq 0$, τότε το σχετικό σφάλμα είναι μικρό και το πρόβλημα είναι σχετικώς εγγενώς ευσταθές. Στην περίπτωση όμως που έχουμε $\alpha = \frac{1}{6}$ το πηλίκο $\frac{\delta y_n}{y_n}$ αυξάνεται εκθετικά και το πρόβλημα είναι σχετικώς εγγενώς ασταθές.

2.4.2 Ομογενή προβλήματα δευτέρας τάξεως

Εξετάζουμε τώρα το ομογενές πρόβλημα αρχικών τιμών δευτέρας τάξεως

$$y_{n+1} + \alpha_n y_n + \beta_n y_{n-1} = 0, y_0 = \alpha, y_1 = \beta.$$

Αφού η εξίσωση διαφορών είναι ομογενής, η γενική λύση είναι απλά η

$$y_n = A_1 y_n^{(1)} + A_2 y_n^{(2)},$$

όπου τα $y_n^{(1)}$ και $y_n^{(2)}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις της εξίσωσης διαφορών. Ας επιλέξουμε τα $y_n^{(1)}$ και $y_n^{(2)}$ ούτως ώστε να ικανοποιούν τις αρχικές συνθήκες $y_0^{(1)} = 1, y_1^{(1)} = 0$ και $y_0^{(2)} = 0, y_1^{(2)} = 1$, αντίστοιχα, τότε η ανεξαρτησία των λύσεων είναι εγγυημένη (γιατί;). Με αυτές τις ανεξάρτητες λύσεις, $A_1 = \alpha$ και $A_2 = \beta$. Προφανώς τα $y_n^{(1)}$ και $y_n^{(2)}$ είναι οι λύσεις των εξισώσεων μεταβολών ως προς τα α και β .

Το σφάλμα δy_n που προκαλείται στο y_n από αβεβαιότητες $\delta\alpha$ και $\delta\beta$ στα α και β , αντίστοιχα, είναι

$$\delta y_n \approx \delta\alpha y_n^{(1)} + \delta\beta y_n^{(2)}.$$

Το σχετικό σφάλμα είναι

$$\frac{\delta y_n}{y_n} \approx \frac{\delta\alpha y_n^{(1)} + \delta\beta y_n^{(2)}}{\alpha y_n^{(1)} + \beta y_n^{(2)}}.$$

Υπολογιστικό Παράδειγμα 2: Το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y_{n+1} - 10.1 y_n + y_{n-1} = 0, y_0 = \alpha, y_1 = \beta$$

έχει την ακριβή λύση

$$y_n = \frac{\alpha}{99} (-10^n + 100 \cdot 10^{-n}) + \frac{\beta}{99} (10 \cdot 10^n - 10 \cdot 10^{-n}).$$

Το σφάλμα δy_n που προκαλείται στο y_n από αβεβαιότητες $\delta\alpha$ και $\delta\beta$ στα α και β , αντίστοιχα, είναι

$$\delta y_n \approx \frac{\delta\alpha}{99} (-10^n + 100 \cdot 10^{-n}) + \frac{\delta\beta}{99} (10 \cdot 10^n - 10 \cdot 10^{-n}).$$

Για μικρά $\delta\alpha$ και $\delta\beta$ το σχετικό σφάλμα θα είναι μικρό εκτός αν $\alpha = 10\beta$, οπότε ο συντελεστής του 10^n στο y_n είναι μηδέν και το $\frac{\delta y_n}{y_n}$ αυξάνει εκθετικά. Σ'αυτή την περίπτωση το πρόβλημα είναι (σχετικά) ασταθές.

Παράδειγμα: Το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y_{n+1} - y_n + y_{n-1} = 0, y_0 = \alpha, y_1 = \beta,$$

είναι ευσταθές $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Γιατί;

2.4.3 Μη-ομογενή προβλήματα δευτέρας τάξεως

Είδαμε ότι η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών

$$y_{n+1} + \alpha_n y_n + \beta_n y_{n-1} = \gamma_n, \quad y_0 = \alpha, \quad y_1 = \beta,$$

είναι της μορφής

$$y_n = y_n^{(p)} + A_1 y_n^{(1)} + A_2 y_n^{(2)}$$

όπου το $y_n^{(p)}$ είναι μία ειδική λύση και τα $y_n^{(1)}, y_n^{(2)}$ είναι δύο ανεξάρτητες λύσεις της αντιστοιχίας ομογενούς εξίσωσης. Αν επιλέξουμε τα $y_n^{(1)}$ και $y_n^{(2)}$ ούτως ώστε να ικανοποιούν τις αρχικές συνθήκες $y_0^{(1)} = 1, y_1^{(1)} = 0$ και $y_0^{(2)} = 0, y_1^{(2)} = 1$, αντίστοιχα (όπως στην προηγούμενη περίπτωση), και την ειδική λύση $y_n^{(p)}$ ούτως ώστε να ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες $y_0^{(p)} = 0, y_1^{(p)} = 0$, τότε $A_1 = \alpha, A_2 = \beta$.

Το σφάλμα δy_n που προκαλείται στο y_n από αβεβαιότητες $\delta\alpha$ και $\delta\beta$ στα α και β αντίστοιχα είναι

$$\delta y_n \approx \delta\alpha y_n^{(1)} + \delta\beta y_n^{(2)}.$$

Το σχετικό σφάλμα είναι

$$\frac{\delta y_n}{y_n} \approx \frac{\delta\alpha y_n^{(1)} + \delta\beta y_n^{(2)}}{y_n^{(p)} + \alpha y_n^{(1)} + \beta y_n^{(2)}}.$$

Υπολογιστικό Παράδειγμα 3: Το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y_{n+1} - 10.1 y_n + y_{n-1} = -1.35 n, \quad y_0 = \alpha, \quad y_1 = \beta$$

έχει λύση

$$y_n = \frac{1}{6} \left(n + \frac{10}{99} (-10^n + 10^{-n}) \right) + \frac{\alpha}{99} (-10^n + 100 \cdot 10^{-n}) + \frac{\beta}{99} (10 \cdot 10^n - 10 \cdot 10^{-n}).$$

Το πρόβλημα είναι ασταθές όταν $\alpha = 10(\beta - \frac{1}{6})$.

2.4.4 Αναδιατύπωση προβλήματος

Είδαμε ότι το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y_{n+1} - 10 y_n = -\frac{3}{2} n - \frac{4}{3}, \quad y_0 = \frac{1}{6}.$$

είναι εγγενώς ασταθές. Αν αντί του πιο πάνω ασταθούς προβλήματος (που έχει λύση $y_n = \frac{1}{6}(n+1)$) εξετάσουμε το επαναδιατυπωμένο πρόβλημα:

Υπολογιστικό Παράδειγμα 4:

$$y_{n+1} - 10 y_n = -\frac{3}{2} n - \frac{4}{3}, \quad y_N = \beta,$$

για κάποιο N και κάποιο β , τότε η λύση είναι

$$y_n = \frac{1}{6} (n+1) + 10^{n-N} \left(\beta - \frac{1}{6} (N+1) \right).$$

Μία αβεβαιότητα $\delta\beta$ στο β δίνει σφάλμα $\delta y_n \approx 10^{n-N} \delta\beta$ και για $n \ll N$, και το σχετικό σφάλμα είναι πάντα μικρό. Επομένως το επαναδιατυπωμένο πρόβλημα είναι ευσταθές.

Παρόμοια, είδαμε ότι το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y_{n+1} - 10.1 y_n + y_{n-1} = 0, y_0 = 1, y_1 = 0.1$$

έχει λύση $y_n = 10^{-n}$ και είναι εγγενώς ασταθές. Αν επαναδιατυπώσουμε το πρόβλημα παίρνοντας $y_N = \alpha$, $y_{N-1} = \beta$, το αντίστοιχο σφάλμα είναι

$$\delta y_n \approx \frac{\{(10010^{n-N} - 10^{N-n}) \delta \alpha + 10(10^{N-n} - 10^{n-N}) \delta \beta\}}{99}.$$

Για μεγάλο N και μικρό n η πιο πάνω ποσότητα είναι και πάλιν μεγάλη. Αυτή η επαναδιατύπωση δεν είναι ικανοποιητική αφού το επαναδιατυπωμένο πρόβλημα είναι και αυτό ασταθές.

Αν όμως επαναδιατυπώσουμε το πρόβλημα ως πρόβλημα συνοριακών τιμών
Υπολογιστικό Παράδειγμα 5:

$$y_{n+1} - 10.1 y_n + y_{n-1} = 0, y_0 = \alpha = 1, y_N = \beta,$$

τότε αβεβαιότητες $\delta \alpha$ και $\delta \beta$ δίνουν σφάλμα

$$\delta y_n \approx \frac{\{(10^{N-n} - 10^{n-N}) \delta \alpha + (10^n - 10^{-n}) \delta \beta\}}{10^N - 10^{-N}}.$$

Το σχετικό σφάλμα είναι μικρό και επομένως το πρόβλημα ευσταθές.

Παράδειγμα: Επαναδιατυπώστε το ασταθές πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y_{n+1} - 10.1 y_n + y_{n-1} = -1.35 n, y_0 = 0, y_1 = \frac{1}{6}$$

ως ευσταθές πρόβλημα συνοριακών τιμών.

2.5 Εγγενής αστάθεια προβλημάτων αρχικών τιμών για γραμμικές διαφορικές εξισώσεις

Η θεωρία της προηγούμενης παραγράφου εφαρμόζεται και στα αντίστοιχα προβλήματα αρχικών τιμών για γραμμικές διαφορικές εξισώσεις.

Παράδειγμα: Η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών πρώτης τάξης

$$y' - 10y = -\frac{31 + 10x}{(3+x)^2}, y(0) = \alpha,$$

είναι η $y = \frac{1}{3+x} + (\alpha - \frac{1}{3}) e^{10x}$. Στην περίπτωση $\alpha = \frac{1}{3}$, το πρόβλημα είναι ασταθές.

Το επαναδιατυπωμένο πρόβλημα

$$y' - 10y = -\frac{31 + 10x}{(3+x)^2}, y(X) = \beta,$$

για αρκετά μεγάλο X είναι ευσταθές.

Παράδειγμα: Η λύση του ομογενούς προβλήματος δευτέρας τάξεως

$$y'' - \pi^2 y = 0, y(0) = \alpha, y'(0) = \beta$$

είναι η

$$y = \frac{1}{2\pi} \{(\alpha\pi + \beta)e^{\pi x} + (\alpha\pi - \beta)e^{-\pi x}\}.$$

Για $\alpha\pi + \beta = 0$ το πρόβλημα είναι ασταθές.

Το επαναδιατυπωμένο πρόβλημα συνοριακών συνθηκών με συνοριακές συνθήκες $y(0) = \alpha$, $y(X) = \gamma$ είναι ευσταθές.

Παράδειγμα: Το μη-ομογενές πρόβλημα δευτέρας τάξεως

$$y'' - \pi^2 y = -\frac{1}{6}\pi^2(x-1), \quad y(0) = \alpha, \quad y'(0) = \beta$$

έχει τη λύση

$$y = \frac{1}{6}(x-1) + \frac{1}{2\pi} \left\{ \left(\frac{1}{6}\pi + \alpha\pi + \beta - \frac{1}{6} \right) e^{\pi x} + \left(\frac{1}{6}\pi + \alpha\pi + \frac{1}{6} - \beta \right) e^{-\pi x} \right\}.$$

Το πρόβλημα είναι ασταθές για $\frac{1}{6}\pi + \alpha\pi + \beta = \frac{1}{6}$.

Το επαναδιατυπωμένο πρόβλημα συνοριακών συνθηκών με συνοριακές συνθήκες $y(0) = \alpha$, $y(X) = \gamma$ είναι ευσταθές.

2.6 Εγγενής αστάθεια: Προβλήματα συνοριακών τιμών

Εξετάζουμε το γραμμικό πρόβλημα δευτέρας τάξεως

$$y_{n+1} + \alpha_n y_n + \beta_n y_{n-1} = \gamma_n, \quad y_0 = \alpha, \quad y_N = \beta.$$

Από το αντίστοιχο πρόβλημα αρχικών τιμών ξέρουμε ότι η λύση είναι της μορφής

$$y_n = y_n^{(p)} + A_1 y_n^{(1)} + A_2 y_n^{(2)},$$

όπου η ειδική λύση $y_n^{(p)}$ ικανοποιεί την εξίσωση και τις αρχικές συνθήκες $y_0^{(p)} = 0$, $y_1^{(p)} = 0$, η $y_n^{(1)}$ ικανοποιεί την ομογενή εξίσωση και τις αρχικές συνθήκες $y_0^{(1)} = 1$, $y_1^{(1)} = 0$, και η $y_n^{(2)}$ ικανοποιεί την ομογενή εξίσωση και τις αρχικές συνθήκες $y_0^{(2)} = 0$, $y_1^{(2)} = 1$. Αν θέσουμε $A_1 = \alpha$, τότε η y_n ικανοποιεί την εξίσωση και την αρχική συνθήκη $y_0 = \alpha$.

Αν ονομάσουμε $y_n^{(q)}$ το $y_n^{(p)} + \alpha y_n^{(1)}$, και επιλέξουμε το A_2 ούτως ώστε $y_N^{(q)} + A_2 y_N^{(2)} = \beta$, τότε μπορούμε να γράψουμε τη λύση ως

$$y_n = y_n^{(q)} + \frac{\beta - y_N^{(q)}}{y_N^{(2)}} y_n^{(2)} = y_n^{(p)} + \alpha y_n^{(1)} + \frac{\beta - y_N^{(p)} - \alpha y_N^{(1)}}{y_N^{(2)}} y_n^{(2)}.$$

Το $y_n^{(q)}$ το βρίσκουμε από το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y_{n+1} + \alpha_n y_n + \beta_n y_{n-1} = \gamma_n, \quad y_0 = \alpha, \quad y_1 = 0,$$

ενώ το $y_n^{(2)}$ από το ομογενές πρόβλημα που περιγράψαμε πιο πάνω.

Αβεβαιότητες $\delta\alpha$ στο α και $\delta\beta$ στο β δίνουν σφάλμα

$$\delta y_n \approx \frac{1}{y_N^{(2)}} \left\{ (y_n^{(1)} y_N^{(2)} - y_N^{(1)} y_n^{(2)}) \delta\alpha + y_n^{(2)} \delta\beta \right\}.$$

- Για $y_N^{(2)}$ μικρό, το $\delta y_n \gg 1$ και έχουμε απόλυτη αστάθεια.
- Για $y_N^{(2)}$ μικρό και $\beta - y_N^{(q)}$ κανονικό, το $y_n \gg 1$ και έχουμε σχετική ευστάθεια.
- Για $y_N^{(2)}$ μικρό και $\beta - y_N^{(q)}$ μικρό (της ίδιας τάξεως), το y_n είναι κανονικό και $\frac{\delta y_n}{y_n} \gg 1$ και έχουμε σχετική αστάθεια.

Παράδειγμα: Εξετάζουμε το πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$y_{n+1} - \sqrt{3} y_n + y_{n-1} = 1, \quad y_0 = \alpha, \quad y_6 = \beta.$$

Όταν $\alpha = 0.9$ και $\beta = 0.6$, το πρόβλημα είναι σχετικά ευσταθές. Όταν $\alpha = 0.9$ και $\beta = 6.563$, το πρόβλημα είναι σχετικά ασταθές. Γιατί; (Σημειώστε ότι

$$y_n^{(2)} = 2 \sin \frac{n\pi}{6}, \quad y_n^{(q)} = \frac{1}{2 - \sqrt{3}} + \left(\alpha - \frac{1}{2 - \sqrt{3}} \right) \cos \frac{n\pi}{6} + B \sin \frac{n\pi}{6}.)$$

Παράδειγμα: Εξετάζουμε το πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$y'' + y = x e^x, \quad y(0) = 0, \quad 0.5 y(1) - 0.78 y'(1) = \beta.$$

Η λύση είναι

$$y(x) = \left(\frac{\beta - 0.25 \cos 1 - 0.39 \sin 1 + 0.39e}{0.5 \sin 1 - 0.78 \cos 1} \right) \sin x + \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2} (x-1)e^x.$$

Για αβεβαιότητα $\delta\beta$ στο β

$$\delta y(x) \approx \frac{1}{0.5 \sin 1 - 0.78 \cos 1} \delta\beta.$$

Το $0.5 \sin 1 - 0.78 \cos 1 = 0.0007$ και αν το $\beta - 0.25 \cos 1 - 0.39 \sin 1 + 0.39e$ είναι κανονικό το πρόβλημα είναι σχετικά ευσταθές. Αν όμως το $\beta - 0.25 \cos 1 - 0.39 \sin 1 + 0.99e \ll 1$, τότε το πρόβλημα είναι ασταθές (γιατί:).

Ασκήσεις

- Δείξτε ότι η ακολουθία $I_n = \int_0^1 x^{2n} e^{-x^2} dx$ είναι φθίνουσα. Δείξτε επίσης ότι η $\{I_n\}$ ικανοποιεί την εξίσωση διαφορών $I_{n+1} - (n + \frac{1}{2})I_n = -\frac{1}{2e}$.
 - Μελετήστε την ευστάθεια του προβλήματος υπολογισμού του I_n δεδομένου του I_0 , ($= \int_0^1 e^{-x^2} dx \approx 0.7468$).
 - Έστω ότι το πρόβλημα λύεται με $I_0 = 0.746$ και ακολούθως με $I_0 = 0.747$. Μετά από πόσα βήματα οι αντίστοιχοι όροι των δύο ακολουθιών θα διαφέρουν κατά 1.0;
 - Προτείνετε μία ακριβή μέθοδο υπολογισμού του I_n .
- Μελετήστε την ευστάθεια του προβλήματος αρχικών τιμών

$$y_{n+1} - 10y_n + 8.19y_{n-1} = 0, \quad y_0 = \alpha, \quad y_1 = \beta.$$

- Στην περίπτωση που το πιο πάνω πρόβλημα είναι ασταθές εξετάστε τρόπους επαναδιατύπωσης σε ευσταθές πρόβλημα.

3. Μελετήστε την ευστάθεια του προβλήματος αρχικών τιμών

$$y_{n+1} - y_n - y_{n-1} = 0, \quad y_0 = 1, \quad y_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

4. Μελετήστε την ευστάθεια του προβλήματος συνοριακών τιμών

$$y'' + k^2 y = x e^x, \quad y(0) = 1, \quad y'(\pi) - k y(\pi) = 3.$$

5. • (α) Δίδεται το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$Y_{n+1} - \frac{5}{2} Y_n + Y_{n-1} = 0, \quad Y_0 = \alpha, \quad Y_1 = \beta.$$

Για ποιο συνδυασμό των α και β είναι το πρόβλημα ασταθές ;

- (β) Σε περίπτωση ασταθείας επαναδιατυπώστε το πρόβλημα ως πρόβλημα αρχικών τιμών με αρχικές συνθήκες $Y_N = \gamma$ και $Y_{N-1} = \delta$. Σχολιάστε την ευστάθεια του προβλήματος. Τι συμβαίνει όταν πάρουμε $\gamma = \delta = 0$;
- (γ) Επαναδιατυπώστε το πρόβλημα ως πρόβλημα συνοριακών τιμών με συνθήκες $Y_0 = \epsilon$ και $Y_N = \zeta$ και σχολιάστε την ευστάθεια του.

6. Δίδεται το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y' = \mu y + \mu (\cos(\mu x) - \sin(\mu x)), \quad y(0) = \alpha.$$

Να μελετηθεί η εγγενής ευστάθεια του προβλήματος για διάφορες τιμές του μ .

7. • (α) Δίδεται το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$Y_{n+1} - 3Y_n + 2Y_{n-1} = n - 1, \quad Y_0 = \alpha, \quad Y_1 = \beta.$$

Για ποιά συνδυασμό των α και β είναι το πρόβλημα ασταθές ;

- (β) Σε περίπτωση ασταθείας επαναδιατυπώστε το πρόβλημα ως πρόβλημα συνοριακών τιμών με συνθήκες $Y_0 = \gamma$ και $Y_N = \delta$. Σχολιάστε την ευστάθεια του προβλήματος.

Κεφάλαιο 3

Προβλήματα Αρχικών Τιμών: Μονοβηματικές Μέθοδοι

3.1 Εισαγωγή

Σ'αυτό το κεφάλαιο αρχίζουμε τη μελέτη αριθμητικών μεθόδων για το απλό πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y' = f(x, y), \quad y(a) = \alpha.$$

Σκοπός: Ο υπολογισμός προσεγγίσεων της λύσης στα συγκεκριμένα σημεία

$$x_0 = a, \quad x_n = x_{n-1} + h_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Το h_n είναι το μήκος του τοπικού βήματος. Συνήθως το h_n λαμβάνεται ως σταθερά h ανεξάρτητη του n . Τότε γράφουμε

$$x_0 = a, \quad x_n = x_0 + nh, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Η προσέγγιση του $y_n = y(x_n)$ συμβολίζεται με Y_n . Φυσικά $Y_0 = y_0 = \alpha$.

Στις μεθόδους που θα εξετάσουμε στα επόμενα κεφάλαια οι προσεγγίσεις της λύσης υπολογίζονται διαδοχικά, δηλαδή πρώτα υπολογίζουμε το Y_1 και ακολούθως τα Y_2, Y_3, \dots

Σ'αυτό το κεφάλαιο επικεντρώνουμε την προσοχή μας στις μεθόδους ενός βήματος ή μονοβηματικές μεθόδους. Σ'αυτές, η τιμή του Y_{n+1} υπολογίζεται από πληροφορίες που έχουμε μόνο στο σημείο x_n .

3.2 Τρεις μονοβηματικές μέθοδοι

3.2.1 Η άμεση μέθοδος του Euler

Η απλούστερα μέθοδος προκύπτει από τον τύπο

$$Y_{n+1} = Y_n + hf(x_n, Y_n)$$

για τον υπολογισμό του Y_{n+1} με Y_n . Αρχίζουμε από το $Y_0 = y(a) = a$ και ακολούθως υπολογίζουμε εύκολα το Y_1 κ.λ.π. Φυσικά η ευκολία εφαρμογής εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από το πόσο περίπλοκη είναι η $f(x, y)$.

Η μέθοδος αυτή μπορεί να ερμηνευθεί με διάφορους τρόπους. Για παράδειγμα, το $\frac{Y_{n+1}-Y_n}{h}$ μπορεί να θεωρηθεί ως μία απλή προσέγγιση του $y'(x_n) = f(x_n, y_n)$ που προσεγγίζουμε με το $f(x_n, Y_n)$. Παρόμοια, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ο πιο πάνω τύπος προέρχεται από τους πρώτους δύο όρους του αναπτύγματος Taylor

$$y(x_n + h) = y(x_n) + h y'(x_n) + \frac{h^2}{2} y''(x_n) + \dots$$

3.2.2 Η έμμεση μέθοδος του Euler

Η έμμεση μέθοδος του Euler δίδεται από τον τύπο

$$Y_{n+1} = Y_n + h f(x_{n+1}, Y_{n+1}).$$

Το χαρακτηριστικό της μεθόδου αυτής είναι ότι είναι *έμμεση*, αφού η ποσότητα που προσπαθούμε να υπολογίσουμε (το Y_{n+1}) εμφανίζεται και στο δεξιό μέρος του τύπου. Αυτό σημαίνει ότι η εφαρμογή της μεθόδου είναι γενικά πιο δύσκολη απ' ό,τι ήταν η εφαρμογή της άμεσης μεθόδου του Euler. Αν η $f(x, y)$ είναι γραμμική ως προς y , δηλαδή της μορφής $f(x, y) = p(x)y + q(x)$, τότε η εφαρμογή είναι απλή αφού

$$Y_{n+1} = \frac{Y_n + h q(x_{n+1})}{1 - h p(x_{n+1})}.$$

Αν όμως η $f(x, y)$ δεν είναι γραμμική, τότε η κατάσταση περιπλέκεται αφού χρειάζεται να επιλύσουμε μία μη-γραμμική εξίσωση για την εύρεση του Y_{n+1} . Για παράδειγμα, αν $f(x, y) = \sin y + p(x)y + q(x)$, τότε για να προσδιορίσουμε το Y_{n+1} χρειάζεται να επιλύσουμε τη μη-γραμμική εξίσωση

$$Y_{n+1} = Y_n + h (\sin Y_{n+1} + p(x_{n+1}) Y_{n+1} + q(x_{n+1})).$$

Για την προσεγγιστική επίλυση της εξίσωσης αυτής χρειάζεται να εφαρμόσουμε κάποιας μορφής επαναληπτική μέθοδο. Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι αυτό πρέπει να γίνει για κάθε βήμα n , είναι εμφανές ότι η εφαρμογή της έμμεσης μεθόδου του Euler χρειάζεται πολύ μεγαλύτερη προσπάθεια απ' ό,τι η άμεση Euler.

Η μέθοδος αυτή μπορεί να ερμηνευθεί, όπως και η άμεση μέθοδος του Euler, π. χ. από τους πρώτους δύο όρους του αναπτύγματος Taylor

$$y(x_n) = y(x_{n+1} - h) = y(x_{n+1}) - h y'(x_{n+1}) + \frac{h^2}{2} y''(x_{n+1}) + \dots$$

3.2.3 Η μέθοδος του κανόνα του τραπεζίου

Η μέθοδος του κανόνα του τραπεζίου δίδεται από τον τύπο

$$Y_{n+1} = Y_n + \frac{1}{2} h \{f(x_n, Y_n) + f(x_{n+1}, Y_{n+1})\}.$$

Όπως και η έμμεση μέθοδος του Euler, είναι και αυτή έμμεση.

Η ονομασία της προέρχεται από τη στενή της σχέση προς τον *κανόνα του τραπεζίου* για αριθμητική ολοκλήρωση

$$y(x_{n+1}) - y(x_n) = \int_{x_n}^{x_{n+1}} y'(x) dx \approx \frac{1}{2} h \{y'(x_n) + y'(x_{n+1})\}.$$

Παράδειγμα: Έστω το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y' = 2x, y(0) = 0,$$

που έχει ακριβή λύση την $y(x) = x^2$.

- A. E.

$$Y_{n+1} = Y_n + 2h x_n = Y_n + 2n h^2,$$

που δίνει $Y_n = (n^2 - n) h^2$.

- E. E.

$$Y_{n+1} = Y_n + 2h x_{n+1} = Y_n + 2(n+1) h^2,$$

που δίνει $Y_n = (n^2 + n) h^2$.

- M. K. T.

$$Y_{n+1} = Y_n + h(x_n + x_{n+1}) = Y_n + (2n+1) h^2,$$

που δίνει $Y_n = n^2 h^2$.

Σημειώστε ότι η ακριβής λύση στους κόμβους είναι η $y_n = n^2 h^2$, επομένως η M. K. T. είναι ακριβής σ'αυτά τα σημεία ενώ οι άλλες δύο μέθοδοι παρουσιάζουν σφάλμα $n h^2$.

Παράδειγμα: Έστω το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y' = -5x y^2 + \frac{5}{x} - \frac{1}{x^2}, y(1) = 1,$$

που έχει ακριβή λύση την $y(x) = \frac{1}{x}$.

- A. E.

$$Y_{n+1} = Y_n - 5(1+nh)h Y_n^2 + \frac{5h}{1+nh} - \frac{h}{(1+nh)^2}$$

- E. E.

$$Y_{n+1} = Y_n - 5(1+nh+h)h Y_{n+1}^2 + \frac{5h}{1+nh+h} - \frac{h}{(1+nh+h)^2}$$

- M. K. T.

$$Y_{n+1} = Y_n + \frac{1}{2} \left[-5(1+nh)h Y_n^2 + \frac{5h}{1+nh} - \frac{h}{(1+nh)^2} \right. \\ \left. - 5(1+nh+h)h Y_{n+1}^2 + \frac{5h}{1+nh+h} - \frac{h}{(1+nh+h)^2} \right]$$

3.3 Ανάλυση σφάλματος

3.3.1 Τοπικό σφάλμα αποκοπής

Μία ένδειξη της ποιότητας μίας αριθμητικής μεθόδου είναι το πόσο καλά ο τύπος που την περιγράφει προσεγγίζει τη διαφορική εξίσωση. Αυτό μας δίδεται από το *τοπικό σφάλμα αποκοπής*, που είναι η διαφορά μεταξύ του δεξιού και του αριστερού μέλους του σχετικού τύπου, χρησιμοποιώντας την ακριβή λύση. Στις τρεις μεθόδους που περιγράψαμε έχουμε

- A. E.

$$T_{n+1} = \frac{y_{n+1} - y_n}{h} - f(x_n, y_n) = \frac{y_{n+1} - y_n}{h} - y'_n$$

- E. E.

$$T_{n+1} = \frac{y_{n+1} - y_n}{h} - f(x_{n+1}, y_{n+1}) = \frac{y_{n+1} - y_n}{h} - y'_{n+1}$$

- M. K. T.

$$T_{n+1} = \frac{y_{n+1} - y_n}{h} - \frac{1}{2} \{f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})\} = \frac{y_{n+1} - y_n}{h} - \frac{1}{2} \{y'_n + y'_{n+1}\}$$

Αν πάρουμε αναπτύγματα Taylor για την ακριβή λύση y και την παράγωγό της y' γύρω από το σημείο x_n , δηλαδή,

$$y_{n+1} = y_n + h y'_n + \frac{1}{2} h^2 y''_n + \frac{1}{6} h^3 y'''_n + \dots$$

και

$$y'_{n+1} = y'_n + h y''_n + \frac{1}{2} h^2 y'''_n + \frac{1}{6} h^3 y^{(iv)}_n + \dots$$

τότε αντικατάσταση στους τύπους για το τοπικό σφάλμα αποκοπής δίνει

- A. E.

$$T_{n+1} = \frac{1}{2} h y''_n + \frac{1}{6} h^2 y'''_n + \dots = O(h)$$

- E. E.

$$T_{n+1} = -\frac{1}{2} h y''_n - \frac{1}{3} h^2 y'''_n + \dots = O(h)$$

- M. K. T.

$$T_{n+1} = -\frac{1}{12} h^2 y'''_n + \dots = O(h^2)$$

Επειδή στην άμεση μέθοδο του Euler έχουμε ότι $T_{n+1} = O(h)$, λέμε ότι η μέθοδος αυτή είναι *πρώτης τάξεως*.

Γενικά, αν σε μία αριθμητική μέθοδο έχουμε ότι $T_{n+1} = O(h^p)$, τότε λέμε ότι η μέθοδος αυτή είναι *τάξεως p* .

Η έμμεση μέθοδος του Euler είναι πρώτης τάξεως, ενώ η μέθοδος του κανόνα του τραπεζίου είναι δευτέρας τάξεως.

3.3.2 Ολικό σφάλμα

Μία πιο χρήσιμη ποσότητα είναι οπωσδήποτε το *ολικό σφάλμα* της μεθόδου που ορίζεται από τον τύπο

$$e_n = y(x_n) - Y_n = y_n - Y_n.$$

Θεώρημα. Στην άμεση Euler έχουμε ότι $e_n = O(h)$.

Απόδειξη. Από το ανάπτυγμα Taylor με υπόλοιπο και τη διαφορική εξίσωση έχουμε ότι

$$y_{n+1} = y(x_n) + h y'(x_n) + \frac{h^2}{2} y''(x_n + \theta h) = y_n + h f(x_n, y_n) + \frac{h^2}{2} y''(x_n + \theta h), \quad \text{όπου } \theta \in (0, 1).$$

Αν η y είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη στο διάστημα $[a, b]$, τότε υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε $|y''(x)| \leq M$, $\forall x \in [a, b]$, επομένως $|\frac{h^2}{2} y''(x_n + \theta h)| \leq c h^2$, $c > 0$ ($c = M/2$). Αφού $Y_{n+1} = Y_n + h f(x_n, Y_n)$, αφαιρώντας

$$e_{n+1} = e_n + h [f(x_n, y_n) - f(x_n, Y_n)] + \frac{h^2}{2} y''(x_n + \theta h) = e_n + h [f(x_n, Y_n + e_n) - f(x_n, Y_n)] + \frac{h^2}{2} y''(x_n + \theta h).$$

Επομένως

$$|e_{n+1}| \leq |e_n| + h |f(x_n, Y_n + e_n) - f(x_n, Y_n)| + c h^2.$$

Από τη συνθήκη του Lipschitz, $|f(x_n, Y_n + e_n) - f(x_n, Y_n)| \leq L |e_n|$, όπου L η σταθερά του Lipschitz οπότε

$$|e_{n+1}| \leq |e_n| + h L |e_n| + c h^2,$$

δηλαδή

$$|e_{n+1}| \leq (1 + h L) |e_n| + c h^2.$$

Από την πιο πάνω ανισότητα μπορεί ναδειχθεί ότι

$$|e_n| \leq \frac{c}{L} h [(1 + h L)^n - 1].$$

Αφού $h L > 0 \Rightarrow 1 + h L < e^{hL}$ ή $(1 + h L)^n < e^{nhL}$. Αν μας ενδιαφέρει το διάστημα $[a, b]$, τότε $nh \leq b - a$, και $(1 + h L)^n < e^{nhL} \leq e^{(b-a)L}$. Επομένως έχουμε ότι

$$|e_n| \leq \frac{c}{L} h [e^{(b-a)L} - 1],$$

και αφού το $\frac{c}{L} [e^{(b-a)L} - 1]$ είναι ανεξάρτητο του h , $e_n = O(h)$.

□.

Μπορεί ναδειχθεί ότι στην έμμεση μέθοδο του Euler $e_n = O(h)$, ενώ στη μέθοδο του κανόνα του τραπεζίου $e_n = O(h^2)$.

Σημείωση Αν σε μία αριθμητική μέθοδο έχουμε ότι $\lim_{h \rightarrow 0} e_n = 0$, τότε λέμε ότι η μέθοδος αυτή συγκλίνει. Δείξαμε δηλαδή ότι η άμεση μέθοδος του Euler συγκλίνει. Παρόμοια, η έμμεση μέθοδος του Euler και η μέθοδος του κανόνα του τραπεζίου συγκλίνουν.

Παράδειγμα: Είδαμε ότι το πρόβλημα αρχικών τιμών

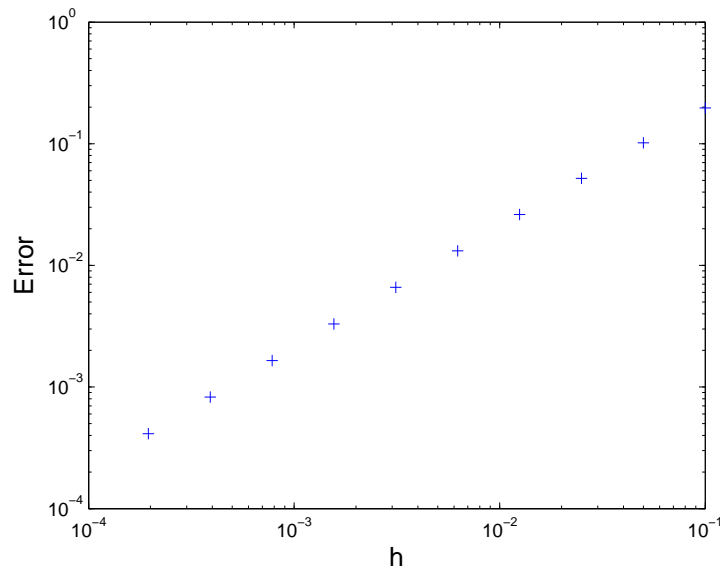
$$y' = 2x, y(0) = 0,$$

έχει ακριβή λύση την $y(x) = x^2$. Τα σφάλματα με τις τρεις μεθόδους που εξετάσαμε είναι

- A. E. $e_n = Y_n - y_n = (n^2 - n) h^2 - n^2 h^2 = -n h^2 = -x_n h = O(h)$
- E. E. $e_n = Y_n - y_n = (n^2 + n) h^2 - n^2 h^2 = n h^2 = x_n h = O(h)$
- M. K. T. $e_n = Y_n - y_n = n^2 h^2 - n^2 h^2 = 0$ ($= O(h^2)$) !

Υπολογιστικό Παράδειγμα 1: Εξετάζουμε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y' = y - \frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{1+x}, y(0) = 2,$$



Σχήμα 3.1: Σφάλμα της άμεσης Euler *vs* h για το Παράδειγμα 1

με ακριβή λύση την $y(x) = e^x + \frac{1}{1+x}$. Εξετάζουμε τις τρεις μεθόδους για την αριθμητική επίλυση του πιο πάνω προβλήματος.

Παράδειγμα: Εξετάζουμε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y' = y^3 - \frac{1}{(1+x)^3} - \frac{1}{(1+x)^2}, \quad y(0) = 1$$

που έχει ακριβή λύση την $y = \frac{1}{1+x}$.

Με την άμεση μέθοδο Euler ο τρόπος λύσης είναι ακριβώς ο ίδιος όπως και για γραμμικά προβλήματα. Για τις άλλες δύο μεθόδους όμως η εφαρμογή γίνεται πολύ πιο δύσκολη. Συγκεκριμένα, η εφαρμογή της μεθόδου του κανόνα του τραπεζίου δίνει

$$Y_{n+1} = Y_n + \frac{1}{2} h \left\{ Y_n^3 - \frac{1}{(1+x_n)^3} - \frac{1}{(1+x_n)^2} + Y_{n+1}^3 - \frac{1}{(1+x_{n+1})^3} - \frac{1}{(1+x_{n+1})^2} \right\}.$$

Ο άγνωστος είναι το Y_{n+1} και λόγω της μη-γραμμικότητας της πιο πάνω εξίσωσης για να υπολογισθεί χρειάζεται η εφαρμογή επαναληπτικής μεθόδου. Αν ορίσουμε την

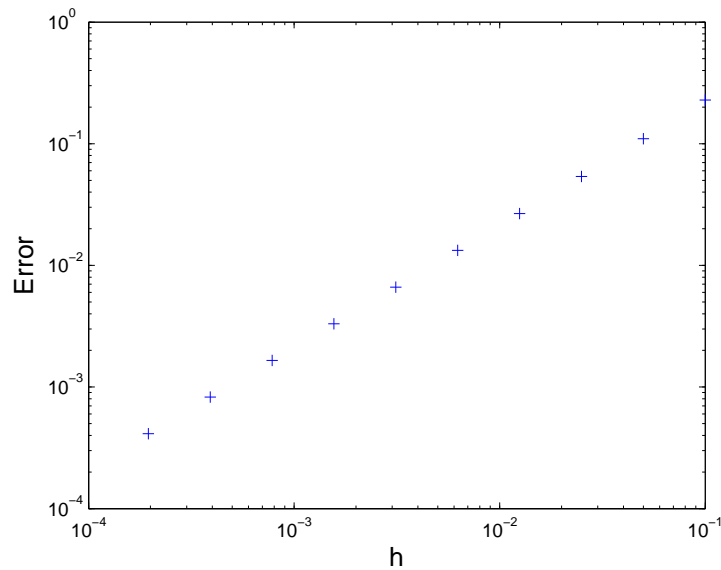
$$g(Y_{n+1}) = Y_{n+1} - Y_n - \frac{1}{2} h \left\{ Y_n^3 - \frac{1}{(1+x_n)^3} - \frac{1}{(1+x_n)^2} + Y_{n+1}^3 - \frac{1}{(1+x_{n+1})^3} - \frac{1}{(1+x_{n+1})^2} \right\},$$

τότε με τη μέθοδο του Newton έχουμε

$$Y_{n+1}^{(s)} = Y_{n+1}^{(s-1)} - \frac{g(Y_{n+1}^{(s-1)})}{g'(Y_{n+1}^{(s-1)})}, \quad s \in \mathbb{N}.$$

Η σύγκλιση της μεθόδου εξαρτάται από το πόσο κοντά στην ακριβή λύση είναι η αρχική προσέγγιση $Y_{n+1}^{(0)}$. Ένας τρόπος εύρεσης καλής αρχικής προσέγγισης είναι η εφαρμογή της άμεσης Euler, δηλαδή

$$Y_{n+1}^{(0)} = Y_n + h \left\{ Y_n^3 - \frac{1}{(1+x_n)^3} - \frac{1}{(1+x_n)^2} \right\}.$$



Σχήμα 3.2: Σφάλμα της έμμεσης Euler vs h για το Υπολογιστικό Παράδειγμα 1

Αν στο παράδειγμα που εξετάζουμε πάρουμε $h = 0.1$, τότε η μέθοδος του κανόνα του τραπεζίου δίνει

$$Y_1 = 0.05 Y_1^3 + 0.871112$$

και η μέθοδος του Newton για την εύρεση του Y_1 δίνει

$$Y_1^{(s)} = Y_1^{(s-1)} - \frac{Y_1^{(s-1)} - 0.05 Y_1^{(s-1)3} - 0.871112}{1 - 0.15 Y_1^{(s-1)2}}, \quad s \in \mathbb{N}.$$

Το $Y_1^{(0)}$ μπορούμε να το βρούμε από την άμεση Euler, δηλαδή

$$Y_1^{(0)} = Y_0 + 0.1 \left(Y_0^3 - \frac{1}{(1+0)^3} - \frac{1}{(1+0)^2} \right) = 0.9.$$

Ακολούθως, από την μέθοδο Newton παίρνουμε $Y_1^{(1)} = 0.90861$ κ.λ.π.

Εκτός από την μέθοδο Newton, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και την επαναληπτική μέθοδο του σταθερού σημείου. Αν συμβολίσουμε με

$$\Psi(Y_{n+1}) = Y_n + \frac{1}{2} h \left\{ Y_n^3 - \frac{1}{(1+x_n)^3} - \frac{1}{(1+x_n)^2} + Y_{n+1}^3 - \frac{1}{(1+x_{n+1})^3} - \frac{1}{(1+x_{n+1})^2} \right\},$$

τότε θέλουμε να λύσουμε την εξίσωση

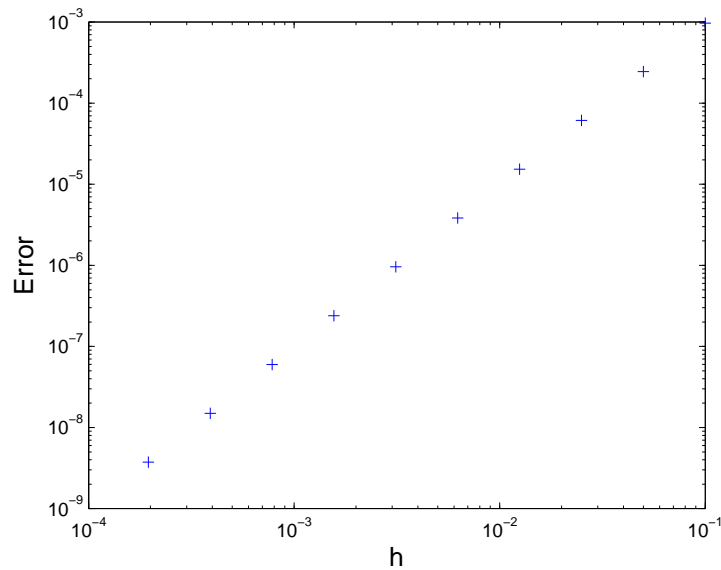
$$Y_{n+1} = \Psi(Y_{n+1}).$$

Αυτό μπορεί να γίνει με τη επαναληπτική μέθοδο

$$Y_{n+1}^{(s)} = \Psi(Y_{n+1}^{(s-1)}), \quad s \in \mathbb{N}.$$

Το $Y_{n+1}^{(0)}$ υπολογίζεται όπως και προηγουμένως από το Y_n με την άμεση Euler.

Ο συνδυασμός της άμεσης Euler και της μεθόδου του κανόνα του τραπεζίου στο πιο πάνω πρόβλημα είναι παράδειγμα μεθόδου πρόβλεψης - διόρθωσης (predictor-corrector). Η πρώτη προσέγγιση υπολογίζεται με έναν άμεσο τύπο (πρόβλεψη) και διαδοχικές βελτιωμένες τιμές υπολογίζονται με έναν έμμεσο τύπο.



Σχήμα 3.3: Σφάλμα της μεθόδου του κανόνα του τραπεζιού vs h για το Υπολογιστικό Παράδειγμα 1

3.4 Επαγωγική αστάθεια: Μερική αστάθεια

Εξετάζουμε κατά πόσο οι μέθοδοι που μελετήσαμε είναι επαγωγικά ευσταθείς ή ασταθείς, δηλαδή πώς μικρές διαταραχές στα δεδομένα επηρεάζουν την λύση (εγγενώς ευσταθών) προβλημάτων.

Εξετάζουμε το πρόβλημα αρχικών τιμών

Υπολογιστικό Παράδειγμα 2:

$$y' = \lambda y - \frac{1}{(1+x)^2} - \lambda \frac{1}{1+x}, \quad y(0) = 1,$$

με λύση $y = \frac{1}{1+x}$. Με το συμβολισμό $g(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} - \lambda \frac{1}{1+x}$, η εφαρμογή των τριών μεθόδων που είδαμε δίνει

- A. E.

$$Y_{n+1} = Y_n + h \{ \lambda Y_n + g(x_n) \} = (1 + h\lambda) Y_n + h g(x_n)$$

- E. E.

$$Y_{n+1} = Y_n + h \{ \lambda Y_{n+1} + g(x_{n+1}) \}$$

ή

$$Y_{n+1} = \frac{1}{1 - h\lambda} Y_n + \frac{h}{1 - h\lambda} g(x_{n+1})$$

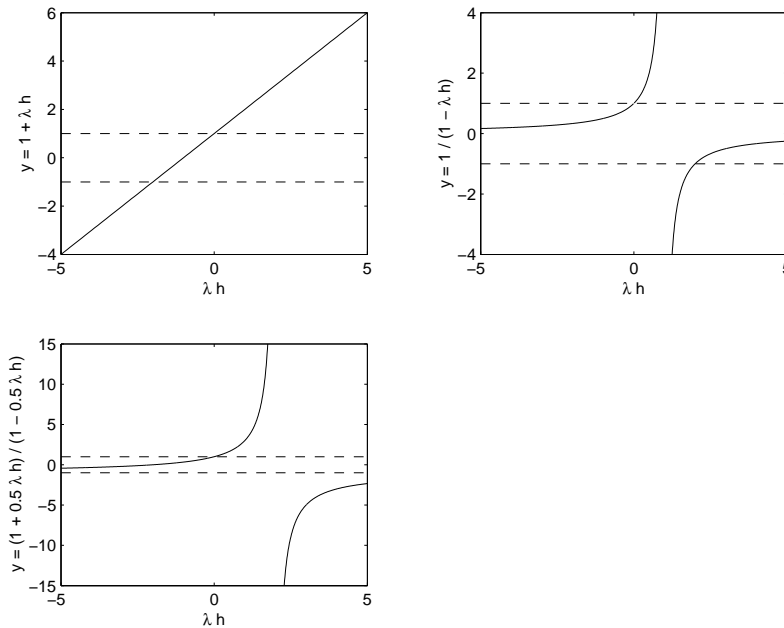
- M. K. T.

$$Y_{n+1} = Y_n + \frac{1}{2} h \{ \lambda Y_n + g(x_n) + \lambda Y_{n+1} + g(x_{n+1}) \}$$

ή

$$Y_{n+1} = \frac{1 + \frac{1}{2} h\lambda}{1 - \frac{1}{2} h\lambda} Y_n + \frac{1}{1 - \frac{1}{2} h\lambda} \frac{h}{2} \{ g(x_n) + g(x_{n+1}) \}$$

Οι συντελεστές που πολλαπλασιάζουν το Y_n στην κάθε μέθοδο είναι οι $1 + h\lambda$, $\frac{1}{1-h\lambda}$ και $\frac{1+\frac{1}{2}h\lambda}{1-\frac{1}{2}h\lambda}$, αντίστοιχα. Αυτοί οι όροι στην ανάλογη δύναμη πολλαπλασιάζουν τυχόν αβεβαιότητες στα δεδομένα, δηλαδή στο Y_0 . Αν ένας εκ των συντελεστών είναι μεγαλύτερος σε μέτρο της μονάδας, τότε αναμένουμε ότι η αντίστοιχη μέθοδος θα είναι επαγωγικά ασταθής.



Σχήμα 3.4: Συμπεριφορά των τριών συντελεστών

Στην περίπτωση που $\lambda > 0$ το πρόβλημα είναι εγγενώς ασταθές, αφού μία μικρή αβεβαιότητα $\delta\alpha$ στην αρχική συνθήκη δίνει σχετικό σφάλμα

$$\frac{\delta y(x)}{y(x)} = \frac{e^{\lambda x} \delta\alpha}{\frac{1}{1+x}}$$

που αυξάνει εκθετικά.

Στην περίπτωση που $\lambda > 0$ η διερεύνηση της επαγωγικής ευστάθειας δεν έχει νόημα και συνήθως εξετάζουμε την συμπεριφορά των μεθόδων για ευσταθή προβλήματα, δηλαδή σ'αυτή την περίπτωση για $\lambda < 0$. Εν τούτοις ας δούμε τι συμβαίνει για $\lambda > 0$:

- Α. Ε. Ο συντελεστής $1 + h\lambda$ είναι πάντα μεγαλύτερος της μονάδας και τυχόν αβεβαιότητα $\delta\alpha$ πολλαπλασιάζεται επί $(1 + h\lambda)^n$ που όπως αναμένεται αναπαράγει το $e^{\lambda x} \delta\alpha$.
- Ε. Ε. Ο συντελεστής $\frac{1}{1-h\lambda}$ είναι κατ'άπολυτο τιμή μεγαλύτερος της μονάδας για $h\lambda \in (0, 1) \cup (1, 2)$, ενώ είναι μικρότερος της μονάδας για $h\lambda \in (2, \infty)$. Αυτό σημαίνει ότι η μέθοδος συμπεριφέρεται φυσιολογικά για το $h\lambda$ στο διάστημα $(0, 1) \cup (1, 2)$ ενώ δεν συμπεριφέρεται φυσιολογικά όπως θα ανεμένετο, στο $(2, \infty)$.
- Μ. Κ. Τ. Εδώ ο συντελεστής $\frac{1+\frac{1}{2}h\lambda}{1-\frac{1}{2}h\lambda}$ είναι πάντα κατ'άπολυτο τιμή μεγαλύτερος της μονάδας, επομένως η μέθοδος συμπεριφέρεται φυσιολογικά.

Στην περίπτωση $\lambda < 0$ το πρόβλημα είναι εγγενώς ευσταθές και τα οιαδήποτε σφάλματα παρατηρούνται στη μέθοδο προέρχονται από επαγωγική αστάθεια. Συγκεκριμένα στο πρόβλημα που εξετάζουμε έχουμε:

- Α. Ε. Για να έχουμε ευστάθεια θέλουμε $|1 + \lambda h| \leq 1$ δηλαδή $|\lambda h| \leq 2$. Όταν $|\lambda h| > 2$ ο συντελεστής $|1 + \lambda h|$ που πολλαπλασιάζει το (τυχόν) αρχικό σφάλμα είναι μεγαλύτερος της μονάδος και το αρχικό σφάλμα αυξάνεται εκθετικά. Τότε η μέθοδος είναι επαγωγικά ασταθής.
- Ε. Ε. Στην έμμεση μέθοδο του Euler, ο συντελεστής $\frac{1}{1-h\lambda}$ είναι πάντα θετικός και μικρότερος της μονάδος. Αναμένουμε επαγωγική ευστάθεια.
- Μ. Κ. Τ. Ο συντελεστής $\frac{1+\frac{1}{2}h\lambda}{1-\frac{1}{2}h\lambda}$ είναι πάντα μικρότερος της μονάδος και έχουμε επαγωγική ευστάθεια.

Παρατήρηση Όταν η συμπληρωματική συνάρτηση στην λύση του προβλήματος που εξετάζουμε δεν είναι αύξουσα εκθετική (δηλαδή όταν έχουμε εγγενώς ευσταθές πρόβλημα), για να έχουμε επαγωγικά ευσταθή μέθοδο ο συντελεστής δεν πρέπει να υπερβαίνει τη μονάδα (σε μέτρο). Όταν μία αριθμητική μέθοδος είναι ευσταθής για τιμές του $h\lambda$ σε ένα υποδιάστημα του \mathbb{R}^- , τότε λέμε ότι η μέθοδος είναι *μερικώς ασταθής*. Είδαμε ότι η άμεση Euler είναι μερικώς ασταθής, αφού είναι ευσταθής μόνο για $h\lambda \in [-2, 0]$. Αντίθετα, η έμμεση Euler και η μέθοδος του κανόνα του τραπεζίου είναι ευσταθείς σε όλο το \mathbb{R}^- , δηλαδή δεν παρουσιάζουν μερική αστάθεια και λέμε ότι είναι ευσταθείς.

Παρατήρηση Λέμε ότι ένα πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y' = f(x, y), \quad y(a) = \alpha$$

είναι *δύσκαμπτο* (stiff), αν η αριθμητική του επίλυση με ορισμένες μεθόδους χρειάζεται πολύ μικρό h για την αποφυγή επαγωγικής ασταθείας.

Παράδειγμα Το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y' = -100y - \frac{1}{(1+x)^2} + 100 \frac{1}{1+x}, \quad y(0) = 1,$$

με λύση $y = \frac{1}{1+x}$, είναι δύσκαμπτο, αφού για να είναι ευσταθής η άμεση Euler θέλουμε $100h \leq 2$ ή $h \leq 0.02$.

Μέχρι στιγμής μιλήσαμε μόνο για την αστάθεια προβλημάτων της μορφής

$$y' = \lambda y + g(x), \quad y(a) = \alpha, \quad \lambda < 0.$$

Τι συμβαίνει για πιο γενικά προβλήματα της μορφής

$$y' = f(x, y), \quad y(a) = \alpha.$$

Σ'αυτή την περίπτωση ο ρόλος του λ αντικαθίσταται από το $\frac{\partial f}{\partial y}$. Στην άμεση Euler, για παράδειγμα, είδαμε ότι

$$e_{n+1} = e_n + h [f(x_n, y_n) - f(x_n, Y_n)] + O(h^2) = e_n + h [f(x_n, y_n) - f(x_n, y_n - e_n)] + O(h^2).$$

Αν υποθέσουμε ότι το Y_n είναι κοντά στο y_n και γράψουμε

$$f(x_n, y_n) - f(x_n, y_n - e_n) \approx e_n \frac{\partial f}{\partial y}(x_n, y_n),$$

τότε

$$e_{n+1} = \left(1 + h \frac{\partial f}{\partial y}(x_n, y_n)\right) e_n + O(h^2).$$

Αυτό σημαίνει ότι τυχόν αρχικό σφάλμα $\delta\alpha$, μετά από n βήματα πολλαπλασιάζεται με το γινόμενο $\prod_{i=0}^{n-1} (1 + h \frac{\partial f}{\partial y_i})$ όπου $\frac{\partial f}{\partial y_i} = \frac{\partial f}{\partial y}(x_i, y_i)$. Επομένως το κατά πόσο μία μέθοδος είναι μερικώς ασταθής εξαρτάται τώρα και από το x , δηλαδή από το που βρισκόμαστε στο διάστημα που μας ενδιαφέρει. Στο κάθε βήμα θέλουμε

$$|1 + h \frac{\partial f}{\partial y}(x_n, y_n)| \leq 1.$$

Παράδειγμα Έστω $f(x, y) = \lambda y^3 - \frac{\lambda}{(1+x)^3} - \frac{1}{(1+x)^2}$ και η αρχική συνθήκη είναι η $y(0) = 1$. Τότε η λύση είναι η $y = \frac{1}{1+x}$. Η σημαντική ποσότητα είναι η

$$h \frac{\partial f}{\partial y} = 3 h \lambda y^2 = 3 h \lambda \frac{1}{(1+x)^2}$$

η οποία μεταβάλλεται με το x . Για $\lambda < 0$, η άμεση Euler θα παρουσιάζει μερική ευστάθεια μόνο αν $h \leq \frac{2(1+x)^2}{3|\lambda|}$. Η έμμεση Euler και η μέθοδος του κανόνα του τραπεζιού είναι ευσταθείς.

3.5 Συστήματα εξισώσεων

Οι τρεις μέθοδοι που περιγράψαμε μπορούν να εφαρμοσθούν και σε συστήματα διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξεως.

Για το πρόβλημα αρχικών τιμών συστήματος M διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξεως

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}), \quad \mathbf{y}(a) = \boldsymbol{\alpha}$$

όπου

$$\mathbf{y} = [y_1, y_2, \dots, y_M]^T, \quad \mathbf{f}(x, \mathbf{y}) = [f_1(x, \mathbf{y}), f_2(x, \mathbf{y}), \dots, f_M(x, \mathbf{y})]^T,$$

οι τρεις μέθοδοι γίνονται

- A. E.

$$\mathbf{Y}_{n+1} = \mathbf{Y}_n + h \mathbf{f}(x_n, \mathbf{Y}_n), \quad \mathbf{Y}_0 = \boldsymbol{\alpha},$$

- E. E.

$$\mathbf{Y}_{n+1} = \mathbf{Y}_n + h \mathbf{f}(x_{n+1}, \mathbf{Y}_{n+1}), \quad \mathbf{Y}_0 = \boldsymbol{\alpha},$$

- M. K. T.

$$\mathbf{Y}_{n+1} = \mathbf{Y}_n + \frac{1}{2} h \{ \mathbf{f}(x_n, \mathbf{Y}_n) + \mathbf{f}(x_{n+1}, \mathbf{Y}_{n+1}) \}, \quad \mathbf{Y}_0 = \boldsymbol{\alpha},$$

όπου $\mathbf{Y}_n = [Y_{1n}, Y_{2n}, \dots, Y_{Mn}]^T$.

Η εφαρμογή της άμεσης Euler είναι πολύ απλή. Στην εφαρμογή των δύο εμμέσων μεθόδων όμως χρειάζεται η επίλυση συστήματος μη-γραμμικών εξισώσεων σε κάθε βήμα. Σ' αυτή την περίπτωση μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο Newton.

Στην περίπτωση της έμμεσης Euler, σε κάθε βήμα θέλουμε να λύσουμε το μη-γραμμικό σύστημα

$$\mathbf{g}(\mathbf{Y}_{n+1}) = \mathbf{Y}_{n+1} - \mathbf{Y}_n - h \mathbf{f}(x_{n+1}, \mathbf{Y}_{n+1}) = \mathbf{0}$$

για τους M αγνώστους $Y_{1n+1}, \dots, Y_{Mn+1}$.

Στην μέθοδο Newton παίρνουμε

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_{n+1}^{(s+1)} &= \mathbf{Y}_{n+1}^{(s)} - \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{Y}_{n+1}} \right)^{-1} \mathbf{g}(\mathbf{Y}_{n+1}^{(s)}) \\ &= \mathbf{Y}_{n+1}^{(s)} - \left(I - h \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{Y}_{n+1}} \right)^{-1} \left(\mathbf{Y}_{n+1}^{(s)} - \mathbf{Y}_n - h \mathbf{f}(x_{n+1}, \mathbf{Y}_{n+1}^{(s)}) \right), \quad s = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

Παρατήρηση Το τοπικό σφάλμα αποκοπής και το ολικό σφάλμα συμπεριφέρονται κατά τον ίδιο ακριβώς τρόπο που είδαμε προηγουμένως, όταν είχαμε μία μόνο εξίσωση.

Για να εξετάσουμε την ευστάθεια των μεθόδων είχαμε μελετήσει το γραμμικό πρόβλημα

$$y' = f(x, y) = \lambda y + g(x), \quad y(a) = \alpha, \quad \lambda < 0.$$

Το αντίστοιχο γραμμικό πρόβλημα στην περίπτωση που έχουμε σύστημα είναι

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \mathbf{r}(x), \quad \mathbf{y}(a) = \boldsymbol{\alpha}$$

όπου ο A είναι $M \times M$ σταθερός πίνακας και το \mathbf{r} M - διάνυσμα. Αν υποθέσουμε ότι ο A είναι μη-ελλiptής (δηλαδή έχει M γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα), τότε υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας G τέτοιος ώστε $G^{-1}AG = D$, όπου ο $D = \text{diag}\{\lambda_i\}$ είναι διαγώνιος πίνακας του οποίου τα στοιχεία είναι οι ιδιοτιμές λ_i , $i = 1, 2, \dots, M$ του A . Αν θέσουμε $\mathbf{z} = G^{-1}\mathbf{y}$ και $\mathbf{t} = G^{-1}\mathbf{r}$, το σύστημα γράφεται ως

$$\mathbf{z}' = D\mathbf{z} + \mathbf{t}(x), \quad \mathbf{z}(a) = G^{-1}\boldsymbol{\alpha} = \bar{\boldsymbol{\alpha}}.$$

Αφού ο D είναι διαγώνιος το πιο πάνω σύστημα μπορεί να διαχωριστεί στα M ανεξάρτητα προβλήματα αρχικών τιμών

$$z_i' = \lambda_i z_i + t_i(x), \quad z_i(a) = \bar{\alpha}_i, \quad i = 1, 2, \dots, M.$$

Η ευστάθεια μίας αριθμητικής μεθόδου για το σύστημα εξαρτάται από την ευστάθεια αυτής της μεθόδου για το κάθε ένα από τα πιο πάνω προβλήματα αρχικών τιμών.

Αν όλα τα $\lambda_i \in \mathbb{R}^-$, τότε για να είναι η άμεση Euler ευσταθής πρέπει

$$h \leq \frac{2}{|\lambda_i|}, \quad i = 1, 2, \dots, M$$

ή

$$h \leq \frac{2}{\max_{i=1,2,\dots,M} |\lambda_i|}.$$

Η έμμεση Euler και η μέθοδος του κανόνα του τραπεζίου δεν παρουσιάζουν αστάθεια.

Στην πράξη δεν χρειάζεται να βρούμε τον πίνακα G για να εφαρμόσουμε τις αριθμητικές μεθόδους αλλά εφαρμόζουμε τη μέθοδο στο πρόβλημα στην αρχική του μορφή. Στην εφαρμογή των εμμέσων μεθόδων χρειάζεται η επίλυση ενός γραμμικού συστήματος $M \times M$ σε κάθε βήμα.

Στη μελέτη της ευσταθείας πιο πάνω, υποθέσαμε ότι οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι πραγματικές. Το ερώτημα είναι τι συμβαίνει όταν αυτές είναι μιγαδικές; Αν μία ιδιοτιμή $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$, $\alpha < 0$, τότε για να είναι ευσταθής η άμεση Euler θέλουμε

$$|1 + h\lambda| \leq 1 \Rightarrow (1 + \alpha h)^2 + \beta^2 h^2 \leq 1.$$

Με άλλα λόγια θέλουμε το $h\lambda$ να βρίσκεται εντός του δίσκου

$$D = \{z \in \mathbb{C} : |z + 1| \leq 1\}$$

Η έμμεση Euler και η μέθοδος του κανόνα του τραπεζίου δεν παρουσιάζουν αστάθεια, αφού για κάθε $\alpha < 0$ ισχύει ότι (γιατί:)

$$\frac{1}{|1 - h\lambda|} \leq 1, \quad \left| \frac{1 + \frac{1}{2}h\lambda}{1 - \frac{1}{2}h\lambda} \right| \leq 1.$$

3.6 Βελτίωση της ακριβείας

Σ'αυτή τήν παράγραφο μελετούμε τρόπους βελτίωσης των αποτελεσμάτων που λαμβάνουμε από τις τρεις μεθόδους ενός βήματος που μελετήσαμε.

3.6.1 Αναβεβλημένη προσέγγιση της λύσης

Είδαμε ότι το ολικό σφάλμα της άμεσης Euler και της έμμεσης Euler είναι $O(h)$ ενώ το αντίστοιχο σφάλμα της μεθόδου του κανόνα του τραπεζίου είναι $O(h^2)$. Αυτό σημαίνει ότι σε ένα συγκεκριμένο σημείο, όταν το h υποδιπλασιάζεται, το σφάλμα διαιρείται δια του δύο στις μεθόδους Euler και δια του τέσσερα στη μέθοδο του κανόνα του τραπεζίου.

Επομένως στο σημείο $x = X$, αν το $Y(X, h)$ συμβολίζει την προσέγγιση της αριθμητικής μεθόδου με βήμα h , μπορούμε να γράψουμε για τις δύο μεθόδους Euler

$$y(X) - Y(X, h) \approx Ah$$

και

$$y(X) - Y(X, \frac{h}{2}) \approx A \frac{h}{2}.$$

Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να εκφράσουμε το σφάλμα ως

$$y(X) - Y(X, \frac{h}{2}) \approx Y(X, \frac{h}{2}) - Y(X, h),$$

δηλαδή μπορούμε να δούμε πόσο μικρό είναι το σφάλμα χωρίς να γνωρίζουμε την ακριβή λύση.

Παρόμοια για τη μέθοδο του κανόνα του τραπεζίου μπορούμε να γράψουμε

$$y(X) - Y(X, h) \approx Ah^2$$

και

$$y(X) - Y(X, \frac{h}{2}) \approx A \frac{h^2}{4}$$

και ανάλογα

$$y(X) - Y(X, \frac{h}{2}) \approx \frac{1}{3} \left\{ Y(X, \frac{h}{2}) - Y(X, h) \right\}.$$

Στις μεθόδους που μελετήσαμε, ο ρυθμός σύγκλισης μπορεί να βελτιωθεί με λίγους επιπλέον υπολογισμούς. Για τις μεθόδους Euler, η σχέση μεταξύ της λύσης y στο σημείο $x = X$ και της αντίστοιχης προσέγγισης $Y(X, h)$ με βήμα h είναι

$$y(X) = Y(X, h) + h u_1(X) + h^2 u_2(X) + \dots,$$

όπου οι συναρτήσεις u_i είναι ανεξάρτητες του h . Αν ξαναγράψουμε την πιο πάνω σχέση με $\frac{h}{2}$ αντί h , έχουμε

$$y(X) = Y(X, \frac{h}{2}) + \frac{h}{2} u_1(X) + \frac{h^2}{4} u_2(X) + \dots$$

και συνδυασμός των δύο σχέσεων δίνει

$$y(X) = 2Y(X, \frac{h}{2}) - Y(X, h) - \frac{h^2}{2} u_2(X) + \dots$$

Αυτό μας οδηγεί στη βελτιωμένη προσέγγιση

$$Y(X, \frac{h}{2}, h) = Y(X, \frac{h}{2}) + \left\{ Y(X, \frac{h}{2}) - Y(X, h) \right\}$$

με σφάλμα $O(h^2)$.

Η ιδέα αυτή μπορεί να επεκταθεί όσο θέλουμε αν το επιτρέπει η ομαλότητα της λύσης. Παίρνοντας $\frac{h}{4}$ αντί h και συνδυάζοντας τις τρεις σχέσεις παίρνουμε την βελτιωμένη προσέγγιση

$$Y(X, \frac{h}{4}, \frac{h}{2}, h) = Y(X, \frac{h}{4}, \frac{h}{2}) + \frac{1}{3} \left\{ Y(X, \frac{h}{4}, \frac{h}{2}) - Y(X, \frac{h}{2}, h) \right\}$$

με σφάλμα $O(h^3)$.

Ο ίδιος μηχανισμός μπορεί να εφαρμοσθεί και στη μέθοδο του κανόνα του τραπεζίου με μεγαλύτερη αποτελεσματικότητα.

Η πρώτη προσέγγιση έχει ολικό σφάλμα $O(h^2)$, και ο αντίστοιχος τύπος γράφεται

$$y(X) = Y(X, h) + h^2 u_2(X) + h^4 u_4(X) + \dots$$

(Οι όροι περιττού βαθμού ως προς h δεν εμφανίζονται και αυτό οφείλεται στη συμμετρία της μεθόδου του κανόνα του τραπεζίου γύρω από το $x = x_n + \frac{h}{2}$. Αυτό φαίνεται αν βρούμε το τοπικό σφάλμα αποκοπής γύρω από το $x = x_n + \frac{h}{2}$.) Συνδυάζοντας τον πιο πάνω τύπο για h και $\frac{h}{2}$ έχουμε τη βελτιωμένη προσέγγιση

$$\bar{Y}(X, \frac{h}{2}, h) = \bar{Y}(X, \frac{h}{2}) + \frac{1}{3} \left\{ \bar{Y}(X, \frac{h}{2}) - \bar{Y}(X, h) \right\}$$

με σφάλμα $O(h^4)$.

Συνδυασμός των περιπτώσεων h , $\frac{h}{2}$ και $\frac{h}{4}$ δίνει

$$Y(X, \frac{h}{4}, \frac{h}{2}, h) = Y(X, \frac{h}{4}, \frac{h}{2}) + \frac{1}{15} \left\{ Y(X, \frac{h}{4}, \frac{h}{2}) - Y(X, \frac{h}{2}, h) \right\}$$

με σφάλμα $O(h^6)$.

3.7 Ακριβέστερες μονοβηματικές μέθοδοι

Μελετούμε δύο τύπους μονοβηματικών μεθόδων με μεγαλύτερη ακρίβεια από αυτές που ήδη μελετήσαμε.

3.7.1 Η μέθοδος του αναπτύγματος Taylor

Σ'αυτή τη μέθοδο απλά υπολογίζουμε το ανάπτυγμα Taylor σε διαδοχικά βήματα. Συγκεκριμένα για την επίλυση του προβλήματος αρχικών τιμών

$$y' = f(x, y), \quad y(a) = \alpha,$$

το ανάπτυγμα Taylor στο $x_1 = a + h$ γύρω από το $x = a$ δίνει

$$y_1 = y_0 + h y'_0 + \frac{h^2}{2} y''_0 + \frac{h^3}{6} y'''_0 + \dots + \frac{h^p}{p!} y_0^{(p)} + \dots$$

Γνωρίζουμε το $y_0 = y(a) = \alpha$ και το $y'_0 = f(x_0, y_0)$. Τις υπόλοιπες παραγώγους μπορούμε να τις βρούμε από τους τύπους:

$$y'' = \frac{\partial f}{\partial x} + f \frac{\partial f}{\partial y},$$

$$y''' = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2f \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + f^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} + f \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2$$

κ.λ.π. Ακολουθώντας προχωρούμε ανάλογα με τον τύπο

$$Y_{n+1} = Y_n + h Y'_n + \frac{h^2}{2} Y''_n + \frac{h^3}{6} Y'''_n + \dots + \frac{h^p}{p!} Y_n^{(p)} + \dots$$

Αν σταματήσουμε το ανάπτυγμα στο $p \in \mathbb{N}$, τότε έχουμε τη μέθοδο του αναπτύγματος Taylor τάξεως p . Σημειώστε ότι για $p = 1$ έχουμε την άμεση Euler.

Σημειώστε επίσης ότι η μέθοδος του αναπτύγματος Taylor είναι άμεση.

Παράδειγμα: Στο πρόβλημα

$$y' = x - y^2, \quad y(1) = 1,$$

από τους τύπους

$$y' = x - y^2,$$

$$y'' = 1 - 2yy'$$

$$y''' = -2yy'' - 2(y')^2$$

$$y^{(iv)} = -2yy''' - 6y'y''$$

κ.λ.π. παίρνουμε $Y'_0 = 0$, $Y''_0 = 1$, $Y'''_0 = -2$, $Y_0^{(iv)} = 4$ και η μέθοδος του αναπτύγματος Taylor τετάρτης τάξεως δίνει

$$Y_1 = 1 + \frac{h^2}{2} - 2\frac{h^3}{6} + 4\frac{h^4}{24}.$$

Παράδειγμα: Το πρόβλημα δευτέρας τάξεως

$$y'' = x y^2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0,$$

μπορούμε να το γράψουμε ως σύστημα

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, y, z), \quad \mathbf{y}(0) = [1, 0]^T,$$

όπου $\mathbf{y} = [y, z]^T$, $z = y'$ και $\mathbf{f}(x, y, z) = [z, x y^2]^T$. Ακολουθώντας εφαρμόζουμε τη μέθοδο του αναπτύγματος Taylor στο πιό πάνω σύστημα.

Διαφορετικά, από του τύπους

$$\begin{aligned}y'' &= x y^2, \\y''' &= y^2 + 2 x y y', \\y^{(iv)} &= 4 y y' + 2 x y y'' + 2 x (y')^2\end{aligned}$$

κ.λ.π. μπορούμε να υπολογίσουμε τα

$$Y_{n+1} = Y_n + h Y_n' + \frac{h^2}{2} Y_n'' + \frac{h^3}{6} Y_n''' + \dots + \frac{h^p}{p!} Y_n^{(p)}$$

και

$$Y_{n+1}' = Y_n' + h Y_n'' + \frac{h^2}{2} Y_n''' + \dots + \frac{h^p}{p!} Y_n^{(p+1)}$$

σε κάθε βήμα.

Για να μελετήσουμε την ευστάθεια αυτής της μεθόδου εξετάζουμε, ως συνήθως, το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y' = \lambda y + g(x) \quad y(a) = \alpha, \quad \lambda < 0.$$

Για τη μέθοδο τάξεως p , ο συντελεστής σ που πολλαπλασιάζει το προηγούμενο σφάλμα είναι τώρα

$$\sigma = 1 + \lambda h + \frac{\lambda^2 h^2}{2!} + \frac{\lambda^3 h^3}{3!} + \dots + \frac{\lambda^p h^p}{p!}$$

και για να έχουμε ευστάθεια πρέπει $|\sigma| \leq 1$.

Για $p = 1$ είδαμε ότι για ευστάθεια απαιτείται $|\lambda h| \leq 2$.

Παράδειγμα: Δείξτε ότι για $p = 2$ απαιτείται $|\lambda h| \leq 2$.

Παράδειγμα: Εξετάστε τι συμβαίνει για $p = 3$ και $p = 4$.

3.7.2 Μέθοδοι Runge–Kutta

Η κύρια αδυναμία τη μεθόδου της σειράς Taylor είναι η ανάγκη υπολογισμού διαδοχικών παραγώγων που είναι υπολογιστικά δαπανηρή, ιδιαίτερα όταν έχουμε μεγάλα μη-γραμμικά συστήματα. Αυτό το κόστος μπορεί να αποφευχθεί με τις μεθόδους Runge - Kutta.

Μια πολύ απλή τέτοια μέθοδος κατασκευάζεται ως εξής: Από τη μέθοδο του κανόνα του τραapeζίου έχουμε

$$y_{n+1} \approx y_n + \frac{1}{2} h \{f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})\}.$$

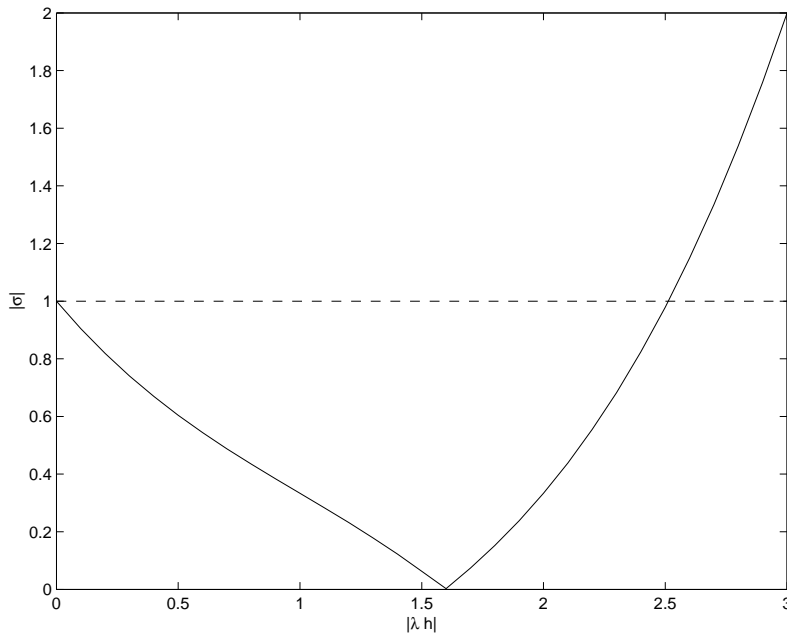
Για να γίνει η πιό πάνω μέθοδος άμεση, προσεγγίζουμε τον έμμεσο όρο $f(x_{n+1}, y_{n+1})$ με το $f(x_{n+1}, y_n + h f(x_n, y_n))$, δηλαδή έχουμε

$$y_{n+1} \approx y_n + \frac{1}{2} h \{f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_n + h f(x_n, y_n))\}.$$

Υπολογιστικά, η μέθοδος που προκύπτει γράφεται στη μορφή

$$k_1 = h f(x_n, Y_n),$$

$$k_2 = h f(x_n + h, Y_n + k_1),$$



Σχήμα 3.5: Συντελεστής της μεθόδου του αναπτύγματος Taylor τρίτης τάξεως

$$Y_{n+1} = Y_n + \frac{1}{2} \{k_1 + k_2\}.$$

Αυτή είναι η μέθοδος Runge - Kutta δευτέρας τάξεως.

Για την εύρεση του τοπικού σφάλματος αποκοπής της μεθόδου θα χρειαστούμε τους τύπους

$$y' = f,$$

$$y'' = f_x + f f_y,$$

$$y''' = f_{xx} + 2f f_{xy} + f^2 f_{yy} + f_x f_y + f f_y^2.$$

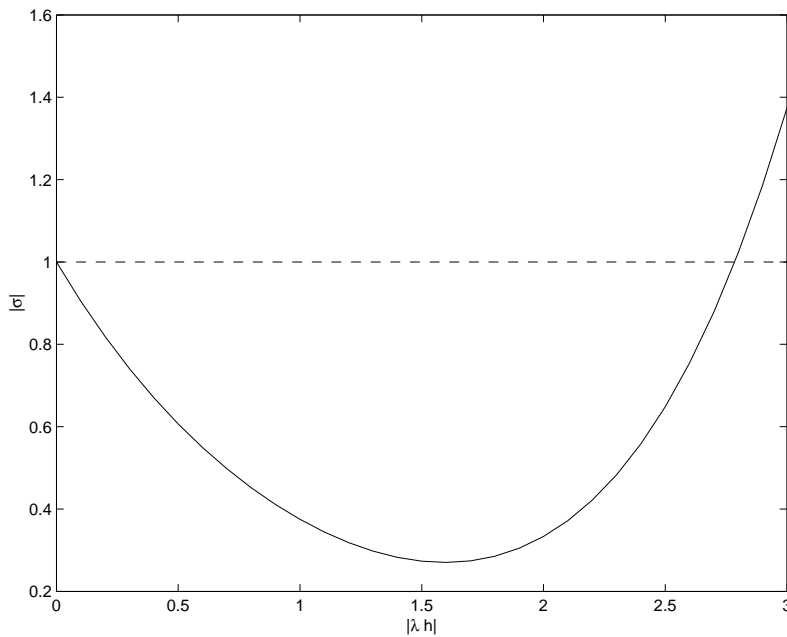
Από τον ορισμό,

$$\begin{aligned} T_{n+1} &= \frac{y_{n+1} - y_n}{h} - \frac{1}{2} \{f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_n + h f(x_n, y_n))\} = \\ &= \frac{1}{h} \left\{ y_n + h y'_n + \frac{h^2}{2!} y''_n + \frac{h^3}{3!} y'''_n + O(h^4) - y_n \right\} \\ &= -\frac{1}{2} \left\{ f + f + h(f_x + f f_y) + \frac{h^2}{2} (f_{xx} + 2f f_{xy} + f^2 f_{yy}) + O(h^3) \right\} = \\ &= \frac{h}{2} (y''_n - f_x - f f_y) + \frac{h^2}{12} (2y'''_n - 3f_{xx} - 6f f_{xy} - 3f^2 f_{yy}) + O(h^3) = \\ &= \frac{h^2}{12} (2f_x f_y + 2f f_y^2 - f_{xx} - 2f f_{xy} - f^2 f_{yy}) = O(h^2), \end{aligned}$$

δηλαδή η μέθοδος είναι δευτέρας τάξεως.

Μπορούμε να κατασκευάσουμε μεθόδους Runge - Kutta πιο υψηλής τάξεως. Η πλέον δημοφιλής είναι η κλασική μέθοδος Runge - Kutta τετάρτης τάξεως που δίδεται από

$$k_1 = h f(x_n, Y_n),$$



Σχήμα 3.6: Συντελεστής της μεθόδου του αναπτύγματος Taylor τετάρτης τάξεως

$$\begin{aligned} k_2 &= h f\left(x_n + \frac{h}{2}, Y_n + \frac{1}{2}k_1\right), \\ k_3 &= h f\left(x_n + \frac{h}{2}, Y_n + \frac{1}{2}k_2\right), \\ k_4 &= h f(x_n + h, Y_n + k_3), \\ Y_{n+1} &= Y_n + \frac{1}{6}\{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\}. \end{aligned}$$

Εννοείται ότι η ανωτέρω μέθοδος δεν είναι η μοναδική μέθοδος Runge - Kutta τετάρτης τάξεως.

Η κατασκευή μεθόδων Runge - Kutta με κριτήριο την τάξη της μεθόδου είναι γενικά πρόβλημα περίπλοκο.

Παράδειγμα: Ας εξετάσουμε τη γενική μορφή

$$Y_{n+1} = Y_n + h \{ \gamma_1 f(x_n, Y_n) + \gamma_2 f(x_n + \alpha h, Y_n + \beta h f(x_n, Y_n)) \}.$$

Πώς βρίσκουμε τους συντελεστές $\gamma_1, \gamma_2, \alpha$ και β για να έχουμε μέγιστη τάξη;

Από τον ορισμό του τοπικού σφάλματος αποκοπής προκύπτει

$$\begin{aligned} T_{n+1} &= \frac{y_{n+1} - y_n}{h} - \{ \gamma_1 f(x_n, y_n) + \gamma_2 f(x_n + \alpha h, y_n + \beta h f(x_n, y_n)) \} \\ &= y'_n + \frac{h}{2} y''_n + \frac{h^2}{6} y'''_n \\ &\quad - \left\{ (\gamma_1 + \gamma_2) f + h \gamma_2 (\alpha f_x + \beta f f_y) + \frac{h^2}{2} \gamma_2 (\alpha^2 f_{xx} + 2\alpha\beta f f_{xy} + \beta^2 f^2 f_{yy}) \right\} + O(h^3) \\ &= f(1 - \gamma_1 - \gamma_2) + h \left(\left(\frac{1}{2} - \alpha\gamma_2\right) f_x + \left(\frac{1}{2} - \beta\gamma_2\right) f f_y \right) \\ &\quad + h^2 \left(\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\alpha^2\gamma_2\right) f_{xx} + \left(\frac{1}{3} - \alpha\beta\gamma_2\right) f f_{xy} + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\beta^2\gamma_2\right) f^2 f_{yy} + \frac{1}{6} f_x f_y + \frac{1}{6} f f_y^2 \right) + O(h^3). \end{aligned}$$

Αν επιλέξουμε τις παραμέτρους ούτως ώστε

$$\gamma_1 + \gamma_2 = 1, \quad \gamma_2 \alpha = \frac{1}{2}, \quad \gamma_2 \beta = \frac{1}{2},$$

τότε $T_{n+1} = O(h^2)$. Λόγω της παρουσίας των όρων $\frac{1}{6} f_x f_y + \frac{1}{6} f f_y^2$ που είναι ανεξάρτητοι των παραμέτρων η μέθοδος δεν μπορεί να είναι υψηλότερας τάξεως.

Για κάθε γ_2 , οι επιλογές

$$\gamma_1 = 1 - \gamma_2, \quad \alpha = \beta = \frac{1}{2\gamma_2},$$

δίνουν $T_{n+1} = O(h^2)$. Συγκεκριμένα,

$$T_{n+1} = h^2 \left(\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{8\gamma_2} \right) f_{xx} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4\gamma_2} \right) f f_{xy} + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{8\gamma_2} \right) f^2 f_{yy} + \frac{1}{6} f_x f_y + \frac{1}{6} f f_y^2 \right) + O(h^3)$$

Πιο γενικά έχουμε την μέθοδο Runge - Kutta που ορίζεται από τα

$$k_1 = h f(x_n, Y_n),$$

$$k_2 = h f(x_n + \alpha_2 h, Y_n + \beta_{21} k_1),$$

$$k_3 = h f(x_n + \alpha_3 h, Y_n + \beta_{31} k_1 + \beta_{32} k_2),$$

.

.

.

$$k_N = h f(x_n + \alpha_N h, Y_n + \beta_{N1} k_1 + \dots + \beta_{NN-1} k_{N-1}),$$

$$Y_{n+1} = Y_n + \{A_1 k_1 + \dots + A_N k_N\}.$$

Επίσης επιλέγουμε

$$\alpha_j = \sum_{i=1}^{j-1} \beta_{j,i}, \quad j = 2, 3, \dots, N.$$

Για να είναι η μέθοδος τουλάχιστον πρώτης τάξεως πρέπει και αρκεί να έχουμε

$$\sum_{i=1}^N A_i = 1.$$

Η ιδέα είναι ο προσδιορισμός των συντελεστών ούτως ώστε η μέθοδος να είναι όσο το δυνατόν πιο ακριβής.

Παράδειγμα: Όταν $N = 4$, οι επιλογές

$$\alpha_2 = \frac{1}{2}, \quad \beta_{21} = \frac{1}{2},$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{2}, \quad \beta_{31} = 0, \quad \beta_{32} = \frac{1}{2},$$

$$\alpha_4 = 1, \quad \beta_{41} = 0, \quad \beta_{42} = 0, \quad \beta_{43} = 1,$$

$$A_1 = \frac{1}{6}, \quad A_2 = A_3 = \frac{1}{3}, \quad A_4 = \frac{1}{6},$$

δίνουν την κλασική μέθοδο Runge - Kutta τετάρτης τάξεως.

Οι μέθοδοι Runge - Kutta δεν είναι άμεσα εφαρμόσιμες σε εξισώσεις ανώτερης τάξεως αλλά εφαρμόζονται εύκολα σε συστήματα εξισώσεων πρώτης τάξεως.

Για το σύστημα M εξισώσεων

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}), \quad \mathbf{y}(a) = \alpha,$$

η κλασσική μέθοδος *Runge - Kutta* τετάρτης τάξεως δίνει

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_1 &= h \mathbf{f}(x_n, \mathbf{Y}_n), \\ \mathbf{k}_2 &= h \mathbf{f}\left(x_n + \frac{h}{2}, \mathbf{Y}_n + \frac{1}{2} \mathbf{k}_1\right), \\ \mathbf{k}_3 &= h \mathbf{f}\left(x_n + \frac{h}{2}, \mathbf{Y}_n + \frac{1}{2} \mathbf{k}_2\right), \\ \mathbf{k}_4 &= h \mathbf{f}(x_n + h, \mathbf{Y}_n + \mathbf{k}_3), \\ \mathbf{Y}_{n+1} &= \mathbf{Y}_n + \frac{1}{6} \{\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4\}. \end{aligned}$$

Ας εξετάσουμε τώρα την ευστάθεια των μεθόδων *Runge - Kutta*.

Για παράδειγμα, στην εφαρμογή της *Runge - Kutta* δευτέρας τάξεως

$$\begin{aligned} k_1 &= h f(x_n, Y_n), \\ k_2 &= h f(x_n + h, Y_n + k_1), \\ Y_{n+1} &= Y_n + \frac{1}{2} \{k_1 + k_2\}, \end{aligned}$$

στο πρόβλημα

$$y' = \lambda y + g(x) \quad y(a) = \alpha, \quad \lambda < 0,$$

ο συντελεστής ευσταθείας σ είναι $\sigma = 1 + \lambda h + \frac{\lambda^2 h^2}{2}$. Για ευστάθεια απαιτείται $|\sigma| \leq 1$ δηλαδή $h \leq \frac{2}{|\lambda|}$. Επομένως η μέθοδος είναι μερικώς ασταθής και ακατάλληλη για δύσκαμπτα προβλήματα.

Γενικά οι άμεσες μέθοδοι *Runge - Kutta* είναι μερικώς ασταθείς. Οι *έμμεσες μέθοδοι Runge - Kutta* είναι συνήθως ευσταθείς.

Για παράδειγμα, όταν η έμμεση μέθοδος *Runge - Kutta* δευτέρας τάξεως

$$\begin{aligned} k_1 &= h f(x_n, Y_n), \\ k_2 &= h f\left(x_n + h, Y_n + \frac{1}{2} k_1 + \frac{1}{2} k_2\right), \\ Y_{n+1} &= Y_n + \frac{1}{2} \{k_1 + k_2\}, \end{aligned}$$

εφαρμοσθεί στο πρόβλημα

$$y' = \lambda y + g(x) \quad y(a) = \alpha, \quad \lambda < 0,$$

ο συντελεστής ευσταθείας είναι

$$\sigma = 1 + \frac{1}{2} \lambda h + \frac{1}{2} \lambda h \frac{1 + \frac{1}{2} \lambda h}{1 - \frac{1}{2} \lambda h} = \frac{1 + \frac{1}{2} \lambda h}{1 - \frac{1}{2} \lambda h}$$

και προφανώς $|\sigma| \leq 1$, οπότε και η μέθοδος είναι ευσταθής.

Πιο γενικά, έχουμε την έμμεση μέθοδο

$$\begin{aligned} k_1 &= h f(x_n + (\alpha + \beta) h, Y_n + \alpha k_1 + \beta k_2), \\ k_2 &= h f(x_n + (\gamma + \delta) h, Y_n + \gamma k_1 + \delta k_2), \end{aligned}$$

$$Y_{n+1} = Y_n + \{c_1 k_1 + c_2 k_2\},$$

με συντελεστή ευσταθείας

$$\sigma = 1 - \lambda h \frac{c_1 (\lambda h(\delta - \beta) - 1) + c_2 (\lambda h(\alpha - \gamma) - 1)}{1 - \lambda h(\alpha + \delta) + \lambda^2 h^2 (\alpha \delta - \beta \gamma)}.$$

Η επιλογές

$$\alpha = \frac{1}{4}, \beta = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6}, \gamma = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{6}, \delta = \frac{1}{4}, c_1 = c_2 = \frac{1}{2},$$

δίνουν

$$\sigma = \frac{1 + \frac{1}{2}\lambda h + \frac{1}{12}\lambda^2 h^2}{1 - \frac{1}{2}\lambda h + \frac{1}{12}\lambda^2 h^2}$$

και προφανώς $|\sigma| \leq 1$ και η μέθοδος είναι ευσταθής.

Οι έμμεσες μέθοδοι Runge - Kutta είναι πολύπλοκες και απαιτούν πολλές πράξεις.

Μια κατηγορία μεθόδων Runge - Kutta που είναι λιγότερο περίπλοκες είναι οι *ημιέμμεσες ή διαγώνια έμμεσες μέθοδοι Runge - Kutta*. Για παράδειγμα, η μέθοδος

$$\begin{aligned} k_1 &= h f(x_n, Y_n), \\ k_2 &= h f(x_n + \frac{h}{2}, Y_n + \frac{1}{4}k_1 + \frac{1}{4}k_2), \\ k_3 &= h f(x_n + h, Y_n + k_2), \\ Y_{n+1} &= Y_n + \frac{1}{6} \{k_1 + 4k_2 + k_3\}, \end{aligned}$$

είναι τέτοια μέθοδος. Μόνο η εξίσωση για το k_2 είναι έμμεση.

Παρατήρηση: Μια ιδιαίτερα χρήσιμη μέθοδος Runge - Kutta, η μέθοδος του *Merson* μας δίνει μία προσέγγιση του σφάλματος σε κάθε σημείο. Αυτή η μέθοδος δίδεται από

$$\begin{aligned} k_1 &= h f(x_n, Y_n), \\ k_2 &= h f(x_n + \frac{h}{3}, Y_n + \frac{1}{3}k_1), \\ k_3 &= h f(x_n + \frac{h}{3}, Y_n + \frac{1}{6}k_1 + \frac{1}{6}k_2), \\ k_4 &= h f(x_n + \frac{h}{2}, Y_n + \frac{1}{8}k_1 + \frac{3}{8}k_3), \\ k_5 &= h f(x_n + h, Y_n + \frac{1}{2}k_1 - \frac{3}{2}k_3 + 2k_4), \end{aligned}$$

και τις προσεγγίσεις

$$\tilde{Y}_{n+1} = Y_n + \frac{1}{2}k_1 - \frac{3}{2}k_3 + 2k_4, \quad \bar{Y}_{n+1} = Y_n + \frac{1}{6}k_1 + \frac{2}{3}k_4 + \frac{1}{6}k_5.$$

Αν η $f(x, y)$ είναι γραμμική ως προς τα x και y , μπορεί να δειχθεί ότι

$$y_{n+1} - \tilde{Y}_{n+1} = -\frac{1}{120}h^5 y^{(v)}, \quad y_{n+1} - \bar{Y}_{n+1} = -\frac{1}{720}h^5 y^{(v)},$$

οπότε

$$y_{n+1} - \bar{Y}_{n+1} \approx \frac{1}{5}(\tilde{Y}_{n+1} - \bar{Y}_{n+1}).$$

Ασκήσεις

1. Να δοθούν οι τύποι των τριών μεθόδων ενός βήματος για το πρόβλημα αρχικών τιμών $y' = f(x, y)$, $y(1) = \alpha$. Να βρεθεί το τοπικό σφάλμα αποκοπής της κάθε μεθόδου. Εξετάστε την μερική ευστάθεια εκάστης των ανωτέρω μεθόδων όταν
- $$f(x, y) = -7y + \frac{1}{1+x^2}.$$

2. Δίδεται ο γενικός τύπος Runge-Kutta της μορφής

$$Y_{r+1} = Y_r + \beta_1 K_1 + \beta_2 K_2 + \beta_3 K_3,$$

$$K_1 = hf(x_r, Y_r), \quad K_2 = hf\left(x_r + \frac{1}{2}h, Y_r + \frac{1}{2}K_1\right), \quad K_3 = hf\left(x_r + \frac{3}{4}h, Y_r + \frac{3}{4}K_2\right),$$

για την επίλυση του προβλήματος αρχικών τιμών $y' = f(x, y)$, $y(1) = \alpha$. Να βρεθούν τα $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ ούτως ώστε ο τύπος να έχει μέγιστη ακρίβεια.

3. Να δοθεί ο τύπος της κλασσικής μεθόδου Runge-Kutta τετάρτης τάξεως. Περιγράψτε την εφαρμογή της μεθόδου για την αριθμητική επίλυση του προβλήματος αρχικών τιμών

$$y'' = y - z - (3y')^2 + (z')^2 + 6z'' + 2x,$$

$$z''' = z'' - y' + e^y - x,$$

$$y(1) = 2, \quad y'(1) = -4, \quad z(1) = -2, \quad z'(1) = 7, \quad z''(1) = 6.$$

4. Δίδεται η γενική μορφή μεθόδου Runge-Kutta:

$$k_1 = hf(x_r, Y_r), \quad k_2 = hf\left(x_r + \frac{1}{2}h, Y_r + \frac{1}{2}k_1\right), \quad k_3 = hf\left(x_r + \gamma h, Y_r + (\gamma - 2)k_1 + 2k_2\right)$$

$$Y_{r+1} = Y_r + \beta_1 k_1 + \beta_2 k_2 + \beta_3 k_3$$

για την επίλυση του προβλήματος αρχικών τιμών

$$y' = f(x, y), \quad y(0) = \alpha.$$

- (α) Στην περίπτωση που $\beta_2 = \beta_3 = 0$, να βρεθεί το β_1 για να ελαχιστοποιείται το τοπικό σφάλμα αποκοπής. Να δοθεί η τάξη του σφάλματος.
- (β) Στην περίπτωση που $\beta_3 = 0$, να βρεθεί η μέθοδος για να ελαχιστοποιείται το τοπικό σφάλμα αποκοπής. Να δοθεί η τάξη του σφάλματος.
- (γ) Στην περίπτωση που τα β_1, β_2 και β_3 είναι θετικά, να βρεθεί η μέθοδος για να ελαχιστοποιείται το τοπικό σφάλμα αποκοπής. Να δοθεί η τάξη του σφάλματος.

Κεφάλαιο 4

Προβλήματα Αρχικών Τιμών - Πολυβηματικές Μέθοδοι

4.1 Εισαγωγή

Οι μονοβηματικές μέθοδοι του Euler και η μέθοδος του κανόνα του τραπεζίου που μελετήσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο είναι στην πράξη πολύ δαπανηρές για την επίλυση προβλημάτων αρχικών τιμών αφού είναι γενικά χαμηλής τάξεως. Οι βελτιωμένες μέθοδοι απαιτούν πολλούς επιπλέον υπολογισμούς και είναι υπολογιστικά περίπλοκες.

Η μέθοδος του αναπτύγματος Taylor είναι μεν υψηλότερας τάξεως αλλά χρειάζεται πολλούς υπολογισμούς παραγώγων. Επίσης οι μέθοδοι Runge-Kutta απαιτούν περίπλοκους υπολογισμούς σε κάθε βήμα. Επίσης, η μέθοδος του αναπτύγματος Taylor και οι άμεσες μέθοδοι Runge-Kutta είναι μερικώς ασταθείς.

Οι δυσκολίες αυτές μπορούν να ξεπεραστούν με ακριβέστερες μεθόδους, τις *πολυβηματικές μεθόδους*, που θα μελετήσουμε σ' αυτό το κεφάλαιο.

4.2 Πολυβηματικοί τύποι πεπερασμένων διαφορών

Υπενθυμίζουμε ότι σκοπός μας είναι η αριθμητική επίλυση του προβλήματος αρχικών τιμών

$$y' = f(x, y), \quad y(a) = \alpha.$$

Ας ξαναγράψουμε τον γενικό τύπο ενός βήματος ως

$$Y_{n+1} + \alpha_1 Y_n = h (\beta_0 Y'_{n+1} + \beta_1 Y'_n).$$

Σημείωση. Σ' αυτό το κεφάλαιο θα χρησιμοποιήσουμε τον συμβολισμό $Y'_n = f(x_n, Y_n)$.

Είδαμε ότι το τοπικό σφάλμα αποκοπής δίδεται από

$$T_{n+1} = \frac{1}{h} (y_{n+1} + \alpha_1 y_n) - \beta_0 y'_{n+1} - \beta_1 y'_n$$

$$= \frac{1}{h} \left\{ (1 + \alpha_1) y_n + (1 - \beta_0 - \beta_1) h y'_n + \left(\frac{1}{2} - \beta_0\right) h^2 y''_n + \left(\frac{1}{6} - \frac{\beta_0}{2}\right) h^3 y'''_n + \left(\frac{1}{24} - \frac{\beta_0}{6}\right) h^4 y^{(iv)}_n + \dots \right\}$$

Μπορούμε να μηδενίσουμε τους τρεις πρώτους όρους παίρνοντας $\alpha_1 = -1$, $\beta_0 = \beta_1 = \frac{1}{2}$ και τότε

$$T_{n+1} = -\frac{1}{12} h^2 y'''_n - \frac{1}{24} h^3 y^{(iv)}_n + \dots$$

και όπως είδαμε αυτή η επιλογή δίνει τη μέθοδο του κανόνα του τραapeζίου. Για να επιτύχουμε μεγαλύτερη ακρίβεια χρειαζόμαστε περισσότερους όρους στον τύπο πεπερασμένων διαφορών.

Για παράδειγμα στον τύπο

$$Y_{n+1} + \alpha_1 Y_n = h (\beta_0 Y'_{n+1} + \beta_1 Y'_n + \beta_2 Y'_{n-1}),$$

για να ελαχιστοποιήσουμε το τοπικό σφάλμα αποκοπής πρέπει να πάρουμε

$$\alpha_1 = -1, \beta_0 + \beta_1 + \beta_2 = 1, \beta_0 - \beta_2 = \frac{1}{2}, \frac{\beta_0}{2} + \frac{\beta_2}{2} = \frac{1}{6}.$$

Η ικανοποίηση των συνθηκών αυτών δίνει

$$Y_{n+1} - Y_n = \frac{h}{12} (5 Y'_{n+1} + 8 Y'_n - Y'_{n-1}),$$

που είναι μέθοδος τρίτης τάξεως με $T_{n+1} = -\frac{1}{24} h^3 y^{(v)}_n + \dots$.

Πιο γενικά έχουμε τον τύπο k - βημάτων

$$Y_{n+1} + \alpha_1 Y_n + \alpha_2 Y_{n-1} + \dots + \alpha_k Y_{n-k+1} = h (\beta_0 Y'_{n+1} + \beta_1 Y'_n + \dots + \beta_k Y'_{n-k+1}),$$

$$n = k-1, k, k+1, \dots$$

$$(Y' = f(x, Y)).$$

Ο τύπος αυτός λέγεται τύπος k -βημάτων γιατί περιέχει το Y ή το $f(x, Y)$ σε k διαδοχικά σημεία πριν το x_{n+1} , που είναι το σημείο στο οποίο θέλουμε να υπολογίσουμε το Y_{n+1} .

Σημειώστε ότι αν $\beta_0 = 0$ η μέθοδος είναι άμεση ενώ αν $\beta_0 \neq 0$ η μέθοδος είναι έμμεση.

Αυτό που μας ενδιαφέρει είναι ο προσδιορισμός των συντελεστών για να έχουμε όσο το δυνατό πιο υψηλή τάξη της μεθόδου. Είδαμε ότι αν σε μία μέθοδο έχουμε ότι $T_{n+1} = O(h^p)$, τότε η μέθοδος είναι τάξεως p . Το τοπικό σφάλμα αποκοπής της μεθόδου k - βημάτων δίδεται απο τον τύπο

$$T_{n+1} = \frac{y_{n+1} + \alpha_1 y_n + \alpha_2 y_{n-1} + \dots + \alpha_k y_{n-k+1}}{h} - (\beta_0 y'_{n+1} + \beta_1 y'_n + \dots + \beta_k y'_{n-k+1}).$$

Παράδειγμα: Να βρεθεί η ακριβέστερη μέθοδος δύο βημάτων.

Εδώ πρέπει να εξετάσουμε την μέθοδο

$$Y_{n+1} + \alpha_1 Y_n + \alpha_2 Y_{n-1} = h (\beta_0 Y'_{n+1} + \beta_1 Y'_n + \beta_2 Y'_{n-1}).$$

Η ελαχιστοποίηση του τοπικού σφάλματος αποκοπής δίνει την έμμεση μέθοδο δύο βημάτων τετάρτης τάξεως

$$Y_{n+1} - Y_{n-1} = \frac{1}{3} h (Y'_{n+1} + 4 Y'_n + Y'_{n-1}).$$

Παράδειγμα: Να βρεθεί η ακριβέστερη άμεση μέθοδος τριών βημάτων.

Εδώ πρέπει να εξετάσουμε την μέθοδο

$$Y_{n+1} + \alpha_1 Y_n + \alpha_2 Y_{n-1} + \alpha_3 Y_{n-2} = h (\beta_1 Y'_n + \beta_2 Y'_{n-1} + \beta_3 Y'_{n-2}).$$

Η ελαχιστοποίηση του τοπικού σφάλματος αποκοπής δίνει τη μέθοδο πέμπτης τάξεως

$$Y_{n+1} + 18 Y_n - 9 Y_{n-1} - 10 Y_{n-2} = h (9 Y'_n + 18 Y'_{n-1} + 3 Y'_{n-2}).$$

4.3 Σύγκλιση, συνέπεια και μηδέν ευστάθεια

Δύο παράγοντες επηρεάζουν την σύγκλιση μίας αριθμητικής μεθόδου. Ο ένας παράγοντας είναι η συνέπεια της εν λόγω μεθόδου. Για να είναι συνεπής μία μέθοδος πρέπει να είναι τουλάχιστον πρώτης τάξεως, δηλαδή $T_{n+1} = O(h)$, τουλάχιστον.

Για να είναι μία μέθοδος k -βημάτων συνεπής πρέπει να έχουμε ότι

$$1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k = 0$$

και

$$1 - \alpha_2 - 2\alpha_3 - \dots - (k-1)\alpha_k = \beta_0 + \beta_1 + \dots + \beta_k.$$

Ο δεύτερος παράγοντας είναι η μηδέν-ευστάθεια της μεθόδου. Εδώ απαιτείται η διερεύνηση των λύσεων της εξίσωσης διαφορών

$$Y_{n+1} + \alpha_1 Y_n + \alpha_2 Y_{n-1} + \dots + \alpha_k Y_{n-k+1} = h (\beta_0 Y'_{n+1} + \beta_1 Y'_n + \dots + \beta_k Y'_{n-k+1}),$$

όταν το $h \rightarrow 0$.

Αυτό σημαίνει ότι πρέπει να διερευνήσουμε τις ρίζες της

$$q^k + \alpha_1 q^{k-1} + \alpha_2 q^{k-2} + \dots + \alpha_{k-1} q + \alpha_k = 0.$$

Αν οι ρίζες αυτές είναι οι q_i , $i = 1, 2, \dots, k$, τότε οι λύσεις που μας ενδιαφέρουν είναι της μορφής $A_i q_i^n$ ή $(A_i + B_i n) q_i^n$ στην περίπτωση που έχουμε διπλές ρίζες.

Αναμένουμε η μία των ριζών να είναι η $q_1 = 1$ που θα είναι η προσέγγιση στη μοναδική λύση της διαφορικής εξίσωσης $y' = 0$ την οποία και προσεγγίζουμε όταν το $h \rightarrow 0$. Επίσης, η πρώτη των εξισώσεων συνεπείας εγγυάται την ύπαρξη αυτής της ρίζας.

Οι υπόλοιπες ρίζες είναι παρασιτικές και δεν έχουν καμμία σχέση με την διαφορική εξίσωση. Αυτές δεν πρέπει να επηρεάζουν την λύση όταν το $h \rightarrow 0$, και αυτό συμβαίνει μόνον αν κανένα άλλο q_i , $i = 2, \dots, k$ δεν υπερβαίνει την μονάδα σε μέτρο. Επίσης, δεν θέλουμε να έχουμε πολλαπλές ρίζες με μέτρο ένα. Με αυτά τα δύο κριτήρια αποφεύγουμε εκθετικά αύξουσες και αλγεβρικά αύξουσες λύσεις, αντίστοιχα, και η μέθοδος είναι μηδέν ευσταθής.

Σημείωση: Μπορεί να δειχθεί ότι η συνέπεια και η μηδέν ευστάθεια σε μία μέθοδο συνεπάγονται σύγκλιση της μεθόδου (*Θεώρημα ισοδυναμίας του Dahlquist*).

Στις μονοβηματικές μεθόδους δεν εμφανίζονται παρασιτικές λύσεις οπότε χρειάζεται να ελέγχουμε μόνο την συνέπεια για να έχουμε σύγκλιση. Με τις πολυβηματικές μεθόδους πρέπει να είναι κανείς πιο προσεκτικός. Πολλές πολυβηματικές μέθοδοι δεν συγκλίνουν, και ο λόγος γι'αυτό είναι η έλλειψη μηδέν ευσταθείας.

Υπολογιστικό Παράδειγμα 1: Δίδεται η μέθοδος

$$Y_{n+1} + 9Y_n - 9Y_{n-1} - Y_{n-2} = 6h (Y'_n + Y'_{n-1}),$$

για το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y' = -y - \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{1+x}, \quad y(0) = 1,$$

με ακριβή λύση την $y(x) = \frac{1}{1+x}$. Είναι εύκολο να δειχθεί ότι η μέθοδος είναι συνεπής. Η χαρακτηριστική εξίσωση που αντιστοιχεί στο $h=0$ είναι

$$q^3 + 9q^2 - 9q - 1 = 0,$$

με ρίζες $q_1 = 1$, $q_2 = -5 + \sqrt{24}$, $q_3 = -5 - \sqrt{24}$. Προφανώς η μέθοδος δεν είναι μηδέν ευσταθής λόγω της q_3 . Από τα αποτελέσματα φαίνεται ότι δεν έχουμε σύγκλιση και ότι όσο μικραίνει το h τόσο χειροτερεύουν τα αποτελέσματα. Ο λόγος είναι ότι η συμπληρωματική συνάρτηση είναι της μορφής $A_1 p_1^n + A_2 p_2^n + A_3 p_3^n$ όπου τώρα τα p_i είναι οι ρίζες της

$$p^3 + (9 + 6h)p^2 - (9 - 6h)p - 1 = 0.$$

Η πιο μεγάλη σε μέτρο παρασιτική λύση είναι κοντά στο $-5 - \sqrt{24} \approx -10$ και αυτό φαίνεται πηγαίνοντας από το ένα βήμα στο άλλο όπου το σφάλμα πολλαπλασιάζεται με το -10 .

Υπολογιστικό Παράδειγμα 2: Δίδεται η μέθοδος

$$Y_{n+1} - Y_n = \frac{h}{12} (5 Y'_{n+1} + 8 Y'_n - Y'_{n-1}),$$

για το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y' = -y - \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{1+x}, \quad y(0) = 1.$$

Είναι εύκολο να δειχθεί ότι η μέθοδος είναι συνεπής. Επίσης, οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης είναι οι $q=0$ και $q=1$, επομένως η μέθοδος είναι μηδέν ευσταθής.

Σ'αυτή την περίπτωση η σύγκλιση είναι εμφανής με το σφάλμα να συμπεριφέρεται σαν το h^3 .

Παρά το γεγονός ότι η συνέπεια και η μηδέν ευστάθεια συνεπάγονται σύγκλιση, έχουμε το εξής ενδιαφέρον φαινόμενο:

Μία άμεση μέθοδος k βημάτων (που έχει $2k$ αυθαίρετες μεταβλητές) μπορεί να κατασκευασθεί με τοπικό σφάλμα αποκοπής $O(h^{2k-1})$. Η ανάλογη έμμεση μέθοδος μπορεί να κατασκευασθεί με τοπικό σφάλμα αποκοπής $O(h^{2k})$. Υπάρχει όμως θεώρημα που αναφέρει ότι η μέγιστη τάξη συγκλίνουσας μεθόδου k βημάτων είναι $k+1$ για k περιττό και $k+2$ για k άρτιο, για έμμεσες μεθόδους. Για άμεσες μεθόδους η μέγιστη τάξη συγκλίνουσας μεθόδου k βημάτων είναι k . Αυτό είναι το *πρώτο φράγμα του Dahlquist*. Με άλλα λόγια η μηδέν ευστάθεια περιορίζει την ακρίβεια.

4.4 Μερική αστάθεια

Έστω ότι εφαρμόζουμε τη γενική μέθοδο k - βημάτων

$$Y_{n+1} + \alpha_1 Y_n + \alpha_2 Y_{n-1} + \dots + \alpha_k Y_{n-k+1} = h (\beta_0 Y'_{n+1} + \beta_1 Y'_n + \dots + \beta_k Y'_{n-k+1}),$$

στο πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y' = \lambda y + g(x), \quad y(a) = \alpha, \quad \lambda < 0.$$

Είναι εύκολο να δειχθεί ότι το σφάλμα $e_n = Y_n - y_n$ ικανοποιεί την εξίσωση

$$(1 - h\lambda\beta_0)e_{n+1} + (\alpha_1 - h\lambda\beta_1)e_n + \dots + (\alpha_k - h\lambda\beta_k)e_{n-k+1} = hT_{n+1}.$$

Η συμπληρωματική συνάρτηση e_n^c είναι της μορφής

$$e_n^c = A_1 p_1^n + A_2 p_2^n + \dots + A_k p_k^n$$

όπου τα p_i , $i = 1, \dots, k$ είναι οι ρίζες της

$$(1 - h\lambda\beta_0) p^k + (\alpha_1 - h\lambda\beta_1) p^{k-1} + \dots + (\alpha_k - h\lambda\beta_k) = 0.$$

Όπως και στην περίπτωση των μονοδηματικών μεθόδων θέλουμε τα σφάλματα να μην αυξάνονται εκθετικά. Λέμε ότι η μέθοδός μας είναι *απόλυτα ευσταθής* για μία δεδομένη τιμή του $h\lambda$, αν όλες οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης βρίσκονται εντός του δίσκου με ακτίνα ένα στο μιγαδικό επίπεδο, και αν υπάρχουν ρίζες επί της περιφέρειας του δίσκου, αυτές να είναι απλές.

Το διάστημα $[\mu_1, \mu_2]$ λέγεται *διάστημα απολύτου ευσταθείας*, αν η μέθοδος είναι απόλυτα ευσταθής για όλες τις τιμές του $h\lambda \in [\mu_1, \mu_2]$.

Αν η μέθοδος είναι μηδέν ευσταθής, τότε συνεπάγεται ότι είναι απόλυτα ευσταθής όταν $h\lambda = 0$. Μία μέθοδος λέγεται *μερικώς ασταθής*, αν έχει πεπερασμένο διάστημα απολύτου ευσταθείας το οποίο περιέχει το μηδέν. Αν το διάστημα απολύτου ευσταθείας είναι το διάστημα $(-\infty, 0]$, λέμε ότι η μέθοδος είναι ευσταθής.

Παράδειγμα: Δίδεται η μέθοδος

$$Y_{n+1} - Y_n = \frac{h}{12} (5Y'_{n+1} + 8Y'_n - Y'_{n-1}).$$

Είναι εύκολο να δειχθεί ότι η μέθοδος αυτή είναι μηδέν ευσταθής. Η αντίστοιχη χαρακτηριστική εξίσωση που καθορίζει την ευστάθεια της μεθόδου είναι η

$$\left(1 - \frac{5}{12}h\lambda\right)p^2 - \left(1 + \frac{8}{12}h\lambda\right)p + \frac{1}{12}h\lambda = 0, \quad \lambda < 0.$$

Για να προσδιορίσουμε το διάστημα απολύτου ευσταθείας της μεθόδου, πρέπει να βρούμε τις τιμές του $h\lambda$ για τις οποίες $|p_{1,2}| \leq 1$. Η ανάλυση αυτή μας δείχνει ότι το διάστημα απολύτου ευσταθείας είναι το $[-6, 0]$.

Παράδειγμα: Δίδεται η μέθοδος

$$Y_{n+1} - Y_n = \frac{h}{2} (3Y'_n - Y'_{n-1}).$$

Το διάστημα απολύτου ευσταθείας είναι το $[-1, 0]$.

Παράδειγμα: Δίδεται η μέθοδος

$$Y_{n+1} - \frac{4}{3}Y_n + \frac{1}{3}Y_{n-1} = \frac{2}{3}hY'_{n+1}.$$

Το διάστημα απολύτου ευσταθείας είναι το $(-\infty, 0]$, επομένως η μέθοδος είναι ευσταθής.

Σημείωση: Για πιο γενικές εξισώσεις της μορφής $y' = f(x, y)$, η μερική ευστάθεια είναι τοπικό ζήτημα και τα κριτήρια μεταβάλλονται σε διαδοχικά βήματα. Όπως και στις μονοδηματικές μεθόδους το λ αντικαθίσταται από κάποια τιμή της $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Σημείωση: Για ένα σύστημα N γραμμικών εξισώσεων πρώτης τάξεως με σταθερούς συντελεστές της μορφής

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{g}(x),$$

η εύρεση του διαστήματος απολύτου ευσταθείας απαιτεί τη διερεύνηση των (αρνητικών) ιδιοτιμών του πίνακα A . Όταν οι ιδιοτιμές είναι μιγαδικές εξετάζουμε την περίπτωση $\lambda = \alpha + i\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < 0$.

Σημείωση: Για το γενικό σύστημα N εξισώσεων πρώτης τάξεως της μορφής

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}),$$

η εύρεση του διαστήματος απολύτου ευσταθείας απαιτεί τη διερεύνηση των ιδιοτιμών του *Ιακωβιανού* πίνακα $J = \left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j} \right)$.

4.4.1 Κλασσικές πολυβηματικές μέθοδοι

Οι τρεις πλέον γνωστές κατηγορίες πολυβηματικών μεθόδων είναι οι ακόλουθες:

4.4.2 Μέθοδοι Adams–Bashforth

Η γενική μορφή μεθόδου Adams - Bashforth k -βημάτων είναι

$$Y_{n+1} - Y_n = h \{ \beta_1 Y'_n + \beta_2 Y'_{n-1} + \dots + \beta_k Y'_{n-k+1} \}.$$

Η μέθοδος είναι τάξης k , και για $k = 1, 2$ και 3 έχουμε

- $Y_{n+1} - Y_n = h Y'_n$ (Άμεση Euler)
- $Y_{n+1} - Y_n = h \left\{ \frac{3}{2} Y'_n - \frac{1}{2} Y'_{n-1} \right\}$
- $Y_{n+1} - Y_n = h \left\{ \frac{23}{12} Y'_n - \frac{4}{3} Y'_{n-1} + \frac{5}{12} Y'_{n-2} \right\}$

Κατασκευή: Για να πετύχουμε την πλέον υψηλή τάξη της μεθόδου Adams - Bashforth k -βημάτων θέλουμε:

- $O(h^{-1})$: Ισχύει.
- $O(1)$: $1 = \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_k$
- $O(h)$: $\frac{1}{2!} = -(\beta_2 + 2\beta_3 + \dots + (k-1)\beta_k)$
- $O(h^2)$: $\frac{1}{3!} = \frac{1}{2!}(\beta_2 + 2^2\beta_3 + \dots + (k-1)^2\beta_k)$
- $O(h^3)$: $\frac{1}{4!} = -\frac{1}{3!}(\beta_2 + 2^3\beta_3 + \dots + (k-1)^3\beta_k)$
- . . .
- $O(h^{k-1})$: $\frac{1}{k!} = \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}(\beta_2 + 2^{k-1}\beta_3 + \dots + (k-1)^{k-1}\beta_k)$

Έχουμε k γραμμικές εξισώσεις για τους k αγνώστους $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$. Η ικανοποίηση των πιο πάνω εξισώσεων μας δίνει μέθοδο τάξεως k .

Υπολογιστικό Παράδειγμα 3: Να εφαρμοσθούν: (ι) η τριβηματική μέθοδος Adams - Bashforth (ιι) η τετραβηματική μέθοδος Adams - Bashforth για την επίλυση του προβλήματος αρχικών τιμών

$$y' = -y - \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{1+x}, \quad y(0) = 1.$$

4.4.3 Μέθοδοι BDF

Η γενική μορφή μεθόδου BDF (τύποι ανάδρομης παραγώγισης) είναι

$$Y_{n+1} + \alpha_1 Y_n + \alpha_2 Y_{n-1} + \dots + \alpha_k Y_{n-k+1} = h \beta_0 Y'_{n+1}.$$

Η μέθοδος είναι τάξης k , και για $k = 1, 2$ και 3 έχουμε

- $Y_{n+1} - Y_n = h Y'_{n+1}$ (Επιμεση Euler)
- $Y_{n+1} - \frac{4}{3} Y_n + \frac{1}{3} Y_{n-1} = \frac{2}{3} h Y'_{n+1}$
- $Y_{n+1} - \frac{18}{11} Y_n + \frac{9}{11} Y_{n-1} - \frac{2}{11} Y_{n-2} = \frac{6}{11} h Y'_{n+1}$

Κατασκευή: Για να πετύχουμε την πλέον υψηλή τάξη της μεθόδου BDF k -βημάτων θέλουμε:

- $O(h^{-1})$: $1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k = 0$
- $O(1)$: $1 - \alpha_2 - 2\alpha_3 - \dots - (k-1)\alpha_k = \beta_0$
- $O(h)$: $\frac{1}{2!}(1 + \alpha_2 + 2^2\alpha_3 + \dots + (k-1)^2\alpha_k) = \beta_0$
- $O(h^2)$: $\frac{1}{3!}(1 - \alpha_2 - 2^3\alpha_3 - \dots - (k-1)^3\alpha_k) = \frac{1}{2!}\beta_0$
- . . .
- $O(h^{k-1})$: $\frac{1}{k!}(1 + (-1)^k(\alpha_2 + 2^k\alpha_3 + \dots + (k-1)^k\alpha_k)) = \frac{1}{(k-1)!}\beta_0$

Έχουμε $k+1$ γραμμικές εξισώσεις για τους $k+1$ αγνώστους $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ και β_0 . Η ικανοποίηση των πιο πάνω εξισώσεων μας δίνει μέθοδο τάξεως k .

Υπολογιστικό Παράδειγμα 4: Να εφαρμοσθεί η τριβηματική μέθοδος BDF για την επίλυση του προβλήματος αρχικών τιμών

$$y' = -y - \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{1+x}, \quad y(0) = 1.$$

4.4.4 Μέθοδοι Adams–Moulton

Η γενική μορφή μεθόδου Adams–Moulton k -βημάτων είναι

$$Y_{n+1} - Y_n = h \{ \beta_0 Y'_{n+1} + \beta_1 Y'_n + \dots + \beta_k Y'_{n-k+1} \}.$$

Η μέθοδος είναι τάξης $k+1$, και για $k = 1, 2$ και 3 έχουμε

- $Y_{n+1} - Y_n = h \{ \frac{1}{2} Y'_{n+1} + \frac{1}{2} Y'_n \}$ (ΜΚΤ)
- $Y_{n+1} - Y_n = h \{ \frac{5}{12} Y'_{n+1} + \frac{8}{12} Y'_n - \frac{1}{12} Y'_{n-1} \}$
- $Y_{n+1} - Y_n = h \{ \frac{9}{24} Y'_{n+1} + \frac{19}{24} Y'_n - \frac{5}{24} Y'_{n-1} + \frac{1}{24} Y'_{n-2} \}$

Κατασκευή: Για να πετύχουμε την πλέον υψηλή τάξη της μεθόδου Adams - Moulton k -βημάτων θέλουμε:

- $O(h^{-1})$: Ισχύει.

- $O(1)$: $1 = \beta_0 + \beta_1 + \dots + \beta_k$
- $O(h)$: $\frac{1}{2!} = \beta_0 - (\beta_2 + 2\beta_3 + \dots + (k-1)\beta_k)$
- $O(h^2)$: $\frac{1}{3!} = \frac{1}{2!}(\beta_0 + (\beta_2 + 2^2\beta_3 + \dots + (k-1)^2\beta_k))$
- . . .
- $O(h^k)$: $\frac{1}{(k+1)!} = \frac{1}{k!}(\beta_0 + (-1)^k(\beta_2 + 2^k\beta_3 + \dots + (k-1)^k\beta_k))$

Έχουμε $k+1$ γραμμικές εξισώσεις για τους $k+1$ αγνώστους $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k$. Η ικανοποίηση των πιο πάνω εξισώσεων μας δίνει μέθοδο τάξεως $k+1$.

Υπολογιστικό Παράδειγμα 5: Να εφαρμοσθεί η τριβηματική μέθοδος Adams - Moulton για την επίλυση του προβλήματος αρχικών τιμών

$$y' = -y - \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{1+x}, \quad y(0) = 1.$$

4.5 Μέθοδοι πρόβλεψης-διόρθωσης

Αναφερθήκαμε ήδη στις μεθόδους πρόβλεψης-διόρθωσης στην αριθμητική επίλυση των μη-γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων που προέρχονται από μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις. Για να πάρουμε μία αρχική τιμή για την επαναληπτική μέθοδο επίλυσης της μη-γραμμικής (γραμμικών) εξισώσεως (εξισώσεων) που προκύπτει (προκύπτουν) από μία έμμεση μέθοδο (Έμμεση Euler ή Μέθοδος του κανόνα του τραπέζιου) χρησιμοποιούμε μία άμεση μέθοδο (Άμεση Euler).

Τέτοιοι συνδυασμοί μπορούν να εφαρμοσθούν και σε πολυβηματικές μεθόδους.

Παράδειγμα: Από την εφαρμογή της (έμμεσης) μεθόδου Adams - Moulton δύο βημάτων (τρίτης τάξεως)

$$Y_{n+1} - Y_n = h \left\{ \frac{5}{12} Y'_{n+1} + \frac{8}{12} Y'_n - \frac{1}{12} Y'_{n-1} \right\}$$

προκύπτει μία μη-γραμμική εξίσωση για την επίλυση της οποίας εφαρμόζουμε την επαναληπτική μέθοδο

$$Y_{n+1}^{(s+1)} = Y_n + h \left\{ \frac{5}{12} f(x_{n+1}, Y_{n+1}^{(s)}) + \frac{8}{12} f(x_n, Y_n) - \frac{1}{12} f(x_{n-1}, Y_{n-1}) \right\}, \quad s = 0, 1, \dots$$

Αυτή αποτελεί την μέθοδο *διόρθωσης*.

Μία αρχική τιμή $Y_{n+1}^{(0)}$ βρίσκεται από την (άμεση) μέθοδο Adams - Bashforth τριών βημάτων (τρίτης τάξεως)

$$Y_{n+1}^{(0)} = Y_n + h \left\{ \frac{23}{12} Y'_n - \frac{4}{3} Y'_{n-1} + \frac{5}{12} Y'_{n-2} \right\}.$$

Αυτή αποτελεί την μέθοδο *πρόβλεψης*.

Επανερχόμενοι στη μέθοδο διόρθωσης αφαιρώντας τον τύπο για το επαναληπτικό βήμα s από τον τύπο για το επαναληπτικό βήμα $s+1$, παίρνουμε

$$Y_{n+1}^{(s+1)} - Y_{n+1}^{(s)} = \frac{5}{12} h \frac{\partial f}{\partial y}(x_{n+1}, \xi) (Y_{n+1}^{(s)} - Y_{n+1}^{(s-1)}), \quad \xi \in (Y_{n+1}^{(s)}, Y_{n+1}^{(s-1)}), \quad s = 0, 1, \dots$$

Προφανώς, η επαναληπτική μέθοδος θα συγκλίνει για

$$\left| \frac{5}{12} h \frac{\partial f}{\partial y} \right| < 1.$$

Επίσης, γνωρίζουμε ότι για να είναι ευσταθής η μέθοδος διόρθωσης απαιτείται $|h \frac{\partial f}{\partial y}| \leq 6$. Σ'αυτή την περίπτωση η συνθήκη για ευστάθεια καλύπτεται από τη συνθήκη για σύγκλιση της επαναληπτικής μεθόδου.

4.6 Εκτίμηση σφάλματος και επιλογή βήματος

Στο προηγούμενο κεφάλαιο αναφέραμε την μέθοδο του Merson που μας έδινε μία εκτίμηση του σφάλματος μίας μέθόδου Runge - Kutta τετάρτης τάξεως. Μ'αυτόν τον τρόπο μπορούσαμε να επιλέγουμε το μήκος του βήματος h για να έχουμε όσο μικρό σφάλμα θέλαμε.

Κάτι ανάλογο μπορεί να επιτευχθεί και στις πολυβηματικές μεθόδους. Εξετάζουμε την μέθοδο πρόβλεψης διόρθωσης της προηγούμενης παραγράφου :

$$Y_{n+1} = Y_n + h \left\{ \frac{23}{12} Y'_n - \frac{4}{3} Y'_{n-1} + \frac{5}{12} Y'_{n-2} \right\} : \text{Predictor (P)}$$

$$Y_{n+1} - Y_n = h \left\{ \frac{5}{12} Y'_{n+1} + \frac{8}{12} Y'_n - \frac{1}{12} Y'_{n-1} \right\} : \text{Corrector (C)}.$$

Υποθέτουμε ότι δεν υπάρχει σφάλμα στις τιμές των Y_i, Y'_i για $i = n-2, n-1$ και n .

Η ακριβής λύση y ικανοποιεί τη σχέση

$$y_{n+1} = y_n + h \left\{ \frac{23}{12} y'_n - \frac{4}{3} y'_{n-1} + \frac{5}{12} y'_{n-2} \right\} + h T_{n+1}^{(P)},$$

όπου $T_{n+1}^{(P)}$ είναι το τοπικό σφάλμα αποκοπής της **P**. Σύμφωνα με την υπόθεση, το σφάλμα στην τιμή του $Y_{n+1}^{(0)}$ είναι

$$e_{n+1}^{(P)} = Y_{n+1}^{(0)} - y_{n+1} = -h T_{n+1}^{(P)}.$$

Για την βελτίωση **C** η ακριβής λύση y ικανοποιεί τη σχέση

$$y_{n+1} = y_n + h \left\{ \frac{5}{12} y'_{n+1} + \frac{8}{12} y'_n - \frac{1}{12} y'_{n-1} \right\} + h T_{n+1}^{(C)},$$

όπου το $T_{n+1}^{(C)}$ είναι το τοπικό σφάλμα αποκοπής της **C**.

Το πρώτο βήμα της **C** δίνει

$$Y_{n+1}^{(1)} = y_n + h \left\{ \frac{5}{12} f(x_{n+1}, Y_{n+1}^{(0)}) + \frac{8}{12} y'_n - \frac{1}{12} y'_{n-1} \right\}.$$

Αφαιρώντας τις δύο σχέσεις παίρνουμε

$$e_{n+1}^{(C)} = Y_{n+1}^{(1)} - y_{n+1} = \frac{5}{12} h \frac{\partial f}{\partial y} e_{n+1}^{(P)} - h T_{n+1}^{(C)},$$

δηλαδή, λαμβάνοντας υπ'όψιν το γεγονός ότι οι **P** και **C** είναι της ίδιας τάξεως,

$$e_{n+1}^{(C)} = -h T_{n+1}^{(C)} + O(h^5).$$

Οι επικρατέστεροι όροι των $T_{n+1}^{(P)}$ και $T_{n+1}^{(C)}$ είναι εύκολο να δειχθεί ότι είναι οι $\frac{3}{8} h^3 y^{(iv)}$ και $-\frac{1}{24} h^3 y^{(iv)}$, αντίστοιχα. Γράφοντας

$$e_{n+1}^{(P)} = -\frac{3}{8} h^4 y^{(iv)}, \quad e_{n+1}^{(C)} = \frac{1}{24} h^4 y^{(iv)},$$

μπορούμε να δείξουμε ότι

$$Y_{n+1}^{(1)} - y_{n+1} \approx \frac{1}{10} (Y_{n+1}^{(1)} - Y_{n+1}^{(0)})$$

που αποτελεί εκτίμηση του σφάλματος της μεθόδου **P-C**.

4.7 Αρχικές τιμές για τις πολυβηματικές μεθόδους

Στην εφαρμογή μίας μονοβηματικής μεθόδου για την αριθμητική επίλυση του προβλήματος αρχικών τιμών

$$y' = f(x, y), \quad y(a) = \alpha,$$

παίρνουμε απλά $Y_0 = y(a)$ και ακολούθως υπολογίζουμε τα Y_1, Y_2, \dots

Στην εφαρμογή της πολυβηματικής μεθόδου k - βημάτων

$$Y_{n+1} + \alpha_1 Y_n + \alpha_2 Y_{n-1} + \dots + \alpha_k Y_{n-k+1} = h (\beta_0 Y'_{n+1} + \beta_1 Y'_n + \dots + \beta_k Y'_{n-k+1}),$$

για το ίδιο πρόβλημα, το $n = k-1, k, k+1, \dots$. Αυτό σημαίνει ότι για να αρχίσει η μέθοδος χρειαζόμαστε τις k αρχικές τιμές Y_0, Y_1, \dots, Y_{k-1} ενώ μας δίδεται *μόνου* το $Y_0 = y(a)$. Επομένως τα Y_1, Y_2, \dots, Y_{k-1} πρέπει να προσεγγισθούν υπολογιστικά. Επίσης, αν η πολυβηματική μέθοδος που χρησιμοποιούμε είναι τάξεως p , θέλουμε οι τιμές των Y_1, Y_2, \dots, Y_{k-1} να βρεθούν με ακρίβεια τουλάχιστον τάξεως p .

Ένας τρόπος να γίνει αυτό είναι να χρησιμοποιηθεί μία ανάλογη μέθοδος Runge - Kutta.

Διαφορετικά, μπορεί να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος του αναπτύγματος Taylor της ανάλογης τάξεως.

Εναλλακτικά, αυτό που μπορεί να γίνει είναι η διαδοχική χρήση πολυβηματικών μεθόδων της ίδιας οικογένειας, για παράδειγμα, μεθόδων Adams - Bashforth, BDF ή Adams - Moulton, αυξάνοντας διαδοχικά την τάξη τους. Στην περίπτωση των μεθόδων Adams - Bashforth, πρώτα υπολογίζουμε την προσέγγιση με την άμεση μέθοδο Euler, ακολούθως με την διβηματική μέθοδο Adams - Bashforth κ.τ.λ. συγχρόνως αυξάνοντας διαδοχικά και το h .

4.8 Αλλαγή του μήκους του βήματος

Κλείνουμε το κεφάλαιο εξετάζοντας τρόπους αύξησης ή μείωσης του μήκους του διαστήματος σε περιπτώσεις που αυτό απαιτείται. Για παράδειγμα, αν η συνάρτηση (λύση) που θέλουμε να προσεγγίσουμε είναι η $y = \frac{1}{x+1}$, όταν το x βρίσκεται κοντά στο -1 , η συνάρτηση καθώς και οι παράγωγοί της είναι μεγάλες σε μέγεθος και μεταβάλλονται ταχέως με το x . Γι'αυτό για την ικανοποιητική προσέγγιση της y απαιτείται η επιλογή μικρού βήματος h . Όταν το x βρίσκεται μακριά από το -1 , η συνάρτηση γίνεται πολύ ομαλή και συνεπώς δεν απαιτείται πλέον μικρό h .

Για την αλλαγή του μήκους του διαστήματος h στις μονοβηματικές μεθόδους, απλά αλλάζουμε την τιμή του h στον μονοβηματικό τύπο από (για παράδειγμα) h_1 σε h_2 .

Στις πολυβηματικές μεθόδους

$$Y_{n+1} + \alpha_1 Y_n + \alpha_2 Y_{n-1} + \dots + \alpha_k Y_{n-k+1} = h (\beta_0 Y'_{n+1} + \beta_1 Y'_n + \dots + \beta_k Y'_{n-k+1}),$$

είδαμε ότι σε μία συγκεκριμένη μέθοδο, η επιλογή των συντελεστών α_i, β_i εξαρτάται από το γεγονός ότι τα μήκη των διαστημάτων $x_{n+1} - x_n, x_n - x_{n-1}, \dots, x_{n-k+2} - x_{n-k+1}$ που εμπλέκονται στον τύπο είναι όλα ίσα με το h . Αυτό σημαίνει ότι όταν τα διαδοχικά διαστήματα δεν είναι ίσα, οι συντελεστές πρέπει να υπολογισθούν εκ νέου.

Παράδειγμα: Έστω ότι το διάστημα διπλασιάζεται, δηλαδή $x_n - x_{n-1} = x_{n-1} - x_{n-2} = \dots = x_1 - x_0 = h_1 = \frac{h}{2}$ και $x_{n+1} - x_n = x_{n+2} - x_{n+1} = \dots = h_2 = h$.

Χρησιμοποιούμε τον τύπο (με $h_1 = \frac{h}{2}$) για τον υπολογισμό των $Y_\ell, \dots, Y_{n-3}, Y_{n-2}, Y_{n-1}, Y_n$. Ακολουθώντας, απλά χρησιμοποιούμε τον ίδιο τύπο (αλλά με $h_2 = h$) για τον υπολογισμό του $Y_{n+1} = \tilde{Y}_{n+1}$ παίρνοντας τις γνωστές τιμές $\tilde{Y}_n = Y_n, \tilde{Y}_{n-1} = Y_{n-2}, \tilde{Y}_{n-2} = Y_{n-4}, \dots$.

Με τον ίδιο τρόπο υπολογίζουμε τα $\tilde{Y}_{n+2}, \tilde{Y}_{n+3}, \dots$.

Παράδειγμα: Έστω ότι τώρα το μήκος του διαστήματος διαιρείται δια του δύο, δηλαδή $x_n - x_{n-1} = x_{n-1} - x_{n-2} = \dots = x_1 - x_0 = h_1 = h$ και $x_{n+1} - x_n = x_{n+2} - x_{n+1} = \dots = h_2 = \frac{h}{2}$. Έστω ότι αρχίζουμε τους υπολογισμούς μας με τον τύπο Adams - Moulton δύο βημάτων

$$Y_{n+1} - Y_n = h \left\{ \frac{5}{12} Y'_{n+1} + \frac{8}{12} Y'_n - \frac{1}{12} Y'_{n-1} \right\}.$$

Όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα εφαρμόζουμε τον πιο πάνω τύπο για τον υπολογισμό των $Y_k, \dots, Y_{n-3}, Y_{n-2}, Y_{n-1}, Y_n$. Για τον υπολογισμό του Y_{n+1} χρειάζεται τώρα ειδικός τύπος. Ο τύπος Adams - Moulton δύο βημάτων είναι της μορφής

$$\tilde{Y}_{n+1} - Y_n = \{ \alpha \tilde{Y}'_{n+1} + \beta Y'_n + \gamma Y'_{n-1} \}.$$

Από το ανάπτυγμα Taylor για το τοπικό σφάλμα αποκοπής έχουμε

$$\begin{aligned} T_{n+1} &= \frac{2}{h} (\tilde{y}_{n+1} - y_n - \{ \alpha \tilde{y}'_{n+1} + \beta y'_n + \gamma y'_{n-1} \}) \\ &= \frac{2}{h} \left(y_n + \frac{h}{2} y'_n + \frac{h^2}{8} y''_n + \frac{h^3}{48} y'''_n + \dots - y_n \right) \\ &\quad - \frac{2}{h} \left(\left\{ \alpha \left(y'_n + \frac{h}{2} y''_n + \frac{h^2}{8} y'''_n + \dots \right) + \beta y'_n + \gamma \left(y'_n - h y''_n + \frac{h^2}{2} y'''_n + \dots \right) \right\} \right). \end{aligned}$$

Η ελαχιστοποίηση του τοπικού σφάλματος αποκοπής απαιτεί $\alpha + \beta + \gamma = \frac{h}{2}$, $\frac{\alpha}{2} - \gamma = \frac{h}{8}$, $\frac{\alpha}{4} + \gamma = \frac{h}{24}$ δηλαδή $\alpha = \frac{16}{72}h$, $\beta = \frac{21}{72}h$, $\gamma = -\frac{1}{72}h$. Ο τύπος για τον υπολογισμό του \tilde{Y}_{n+1} γίνεται επομένως

$$\tilde{Y}_{n+1} - Y_n = h \left\{ \frac{16}{72} \tilde{Y}'_{n+1} + \frac{21}{72} Y'_n - \frac{1}{72} Y'_{n-1} \right\},$$

που είναι τύπος δύο βημάτων και τρίτης τάξεως.

Για τον υπολογισμό των $\tilde{Y}_{n+2}, \tilde{Y}_{n+3}, \dots$ απλά εφαρμόζουμε τον αρχικό τύπο Adams - Moulton με $h_2 = \frac{h}{2}$.

Γενικά, όταν έχουμε τον τύπο Adams - Moulton δύο βημάτων και το διάστημα μεταβάλλεται από $h_1 = x_n - x_{n-1}$ σε $h_2 = x_{n+1} - x_n$, ο ειδικός τύπος γίνεται

$$\tilde{Y}_{n+1} - Y_n = \{ \alpha \tilde{Y}'_{n+1} + \beta Y'_n + \gamma Y'_{n-1} \},$$

όπου

$$\alpha = \frac{h_2(2h_2 + 3h_1)}{6(h_2 + h_1)}, \quad \beta = \frac{h_2(h_2 + 3h_1)}{6h_1}, \quad \gamma = -\frac{h_2^3}{6h_1(h_2 + h_1)}.$$

Το τοπικό σφάλμα αποκοπής είναι

$$T_{n+1} = \left(\frac{\gamma}{6} \frac{h_1^3}{h_2} + \left(\frac{h_2}{24} - \frac{\alpha}{6} \right) h_2^2 \right) y^{(4)} + \dots.$$

Αν $h_1 = O(h)$ και $h_2 = O(h)$ τότε ο τύπος αυτός είναι τρίτης τάξεως.

Για παράδειγμα, αν $h_1 = \mu h$ και $h_2 = \nu h$, τότε

$$\alpha = \frac{\nu(2\nu + 3\mu)}{6(\nu + \mu)} h, \quad \beta = \frac{\nu(\nu + 3\mu)}{6\mu} h, \quad \gamma = -\frac{\nu^3}{6\mu(\nu + \mu)} h,$$

και ο ειδικός τύπος γίνεται

$$\tilde{Y}_{n+1} - Y_n = \frac{h}{6} \left\{ \frac{\nu(2\nu+3\mu)}{(\nu+\mu)} \tilde{Y}'_{n+1} + \frac{\nu(\nu+3\mu)}{\mu} Y'_n - \frac{\nu^3}{\mu(\nu+\mu)} Y'_{n-1} \right\}.$$

Σημείωση: Όταν έχουμε μέθοδο τριών βημάτων και το διάστημα αλλάζει από h_1 σε h_2 στο x_n τότε απαιτείται η κατασκευή δύο ειδικών τύπων. Ο ένας συνδέει τα σημεία x_{n-2} , x_{n-1} , x_n και x_{n+1} και ο άλλος τα σημεία x_{n-1} , x_n , x_{n+1} και x_{n+2} .

Στην ανάλογη μέθοδο k -βημάτων απαιτείται η κατασκευή $k-1$ ειδικών τύπων.

Ασκήσεις

1. Εξετάστε τη συνέπεια και τη μηδέν ευστάθεια της μεθόδου

$$Y_{n+1} - (1 + \alpha) Y_n + \alpha Y_{n-1} = \frac{h}{2} ((3 - \alpha) Y'_n - (1 + \alpha) Y'_{n-1}).$$

Τι συμβαίνει για $\alpha = 0$ και $\alpha = -5$;

2. Να βρεθεί η τάξη της μεθόδου

$$Y_{n+1} + (\beta - 1) Y_n - \beta Y_{n-1} = \frac{h}{4} ((\beta + 3) Y'_{n+1} + (3\beta + 1) Y'_{n-1}).$$

Ακολουθώς εξετάστε τη μηδέν ευστάθεια της μεθόδου.

3. Να βρεθεί η ακριβέστερη άμεση μέθοδος δύο βημάτων και ακολουθώς να εξετασθεί η μηδέν ευστάθειά της.
4. Να μελετηθεί η ευστάθεια των μεθόδων δύο βημάτων ως προς το πρόβλημα $y' = \lambda y$, $y(a) = \alpha$, $\lambda < 0$:

- $Y_{n+1} + 4 Y_n - 5 Y_{n-1} = 2 h (2 Y'_n - Y'_{n-1})$.
- $Y_{n+1} - Y_{n-1} = \frac{h}{3} (Y'_{n+1} + 4 Y'_n + Y'_{n-1})$.

5. Εξετάστε την ακρίβεια και μερική ευστάθεια της μεθόδου δύο βημάτων

$$Y_{n+1} - Y_n = \frac{h}{16} (9 Y'_{n+1} + 6 Y'_n + Y'_{n-1})$$

για την επίλυση του προβλήματος αρχικών τιμών: $y' = \lambda y$, $\lambda < 0$, $y(0) = a$. Πώς συγκρίνεται η πιο πάνω μέθοδος με την αντίστοιχη μέθοδο Adams-Moulton;

6.
 - Να βρεθεί η πλέον ακριβής έμμεση μέθοδος δύο βημάτων. Δώστε το τοπικό σφάλμα αποκοπής.
 - Πως μεταβάλλεται η μέθοδος όταν το διάστημα αλλάζει από h σε $\frac{h}{2}$ στο x_n και από $\frac{h}{2}$ σε $\frac{h}{3}$ στο x_{n+1} ;
7. Δείξτε ότι οι μέθοδοι Adams-Bashforth και BDF k -βημάτων είναι τάξεως k , ενώ η μέθοδος Adams-Moulton k -βημάτων είναι τάξεως $k+1$.
8. Να δοθούν τα συστήματα για τους συντελεστές των δύο ειδικών τύπων Adams-Moulton τριών βημάτων όταν το μήκος του διαστήματος αλλάζει από h_1 σε h_2 στο x_n .
Να επαναληφθεί η διαδικασία για τους αντίστοιχους τύπους Adams-Bashforth και BDF.

Κεφάλαιο 5

Αριθμητική Επίλυση Προβλημάτων Συνοριακών Τιμών

5.1 Εισαγωγή

Η απλούστερη περίπτωση προβλήματος συνοριακών τιμών είναι

$$y'' = f(x, y, y'), \quad x \in [a, b],$$

με τις *διαχωρισμένες* συνοριακές συνθήκες

$$g_1(y(a), y'(a)) = 0, \quad g_2(y(b), y'(b)) = 0,$$

ή με τις *πεπλεγμένες* συνοριακές συνθήκες

$$h_1(y(a), y'(a), y(b), y'(b)) = 0, \quad h_2(y(a), y'(a), y(b), y'(b)) = 0.$$

Για το σύστημα εξισώσεων πρώτης τάξεως

$$y_1' = f_1(x, y_1, y_2, y_3),$$

$$y_2' = f_2(x, y_1, y_2, y_3),$$

$$y_3' = f_3(x, y_1, y_2, y_3), \quad x \in [a, b],$$

μπορεί να έχουμε διαχωρισμένες συνοριακές συνθήκες της μορφής

$$y_1(a) = A, \quad y_2(a) + y_3(a) = B, \quad y_1(b) = C,$$

ή πεπλεγμένες συνοριακές συνθήκες της μορφής

$$h_i(y_1(a), y_2(a), y_3(a), y_1(b), y_2(b), y_3(b)) = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

Παράδειγμα: Να λυθούν τα προβλήματα συνοριακών τιμών

- $y'' = -y, \quad x \in [0, \frac{\pi}{2}], \quad y(0) = 2, \quad y(\frac{\pi}{2}) = 0,$

- $y'' = -y$, $x \in [0, \pi]$, $y(0) = 2$, $y(\pi) = 0$,
- $y'' = -y$, $x \in [0, \pi]$, $y(0) = 2$, $y(\pi) = -2$,
- $y'' = y + x$, $x \in [0, 1]$, $y(0) = 0$, $y(1) = 1$,
- $y'' - z = 0$ και $z'' - y = 0$, $x \in [0, 1]$, $y(0) = y'(0) = 1$, $y(1) = z(1)$, $y'(1) = z'(1)$,
- $y^{iv} + y'' = 2e^x$, $x \in [0, \pi]$, $y(0) + y(\pi) = 1$, $y'(\pi) = -1$,
- $y'' + e^{y+1} = 0$, $x \in [0, 1]$, $y(0) = y(1) = 0$.

Αναφέρουμε επίσης τα *προβλήματα ιδιοτιμών* της μορφής

$$y'' + \{f(x) + \lambda\} y = 0, \quad x \in [a, b], \quad y(a) = y(b) = 0.$$

Αυτά τα προβλήματα έχουν μη τετριμμένες λύσεις (*ιδιοσυναρτήσεις*) μόνο για συγκεκριμένες τιμές του λ (*ιδιοτιμές*).

Για παράδειγμα, το πρόβλημα

$$y'' + \lambda y = 0, \quad x \in [0, 1], \quad y(0) = y(1) = 0.$$

έχει τις ιδιοτιμές

$$\lambda_n = n^2 \pi^2, \quad n = 1, 2, \dots,$$

και τις ιδιοσυναρτήσεις

$$y_n(x) = A_n \sin n\pi x, \quad n = 1, 2, \dots,$$

όπου τα A_n είναι σταθερές. Άλλες λύσεις δεν υπάρχουν.

Σημείωση: Η πιο γενική μορφή προβλημάτων ιδιοτιμών

$$[p(x) y']' + q(x) y + \lambda r(x) y = 0, \quad x \in [a, b],$$

με συνοριακές συνθήκες της μορφής

$$\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0, \quad \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0,$$

είναι το πρόβλημα Sturm - Liouville.

Τέλος, αναφέρουμε τα *προβλήματα ελευθέρου συνόρου* στα οποία η θέση ενός άκρου του διαστήματος (του b , ας πούμε) δεν είναι γνωστή και πρέπει να προσδιορισθεί με την λύση.

Για παράδειγμα, στο πρόβλημα

$$y'' + y = 1, \quad x \in [0, b], \quad y(0) = 0, \quad y(b) = 1, \quad y'(b) = 2,$$

το b δεν είναι γνωστό. Η λύση y του προβλήματος είναι

$$y = 1 + \cot b \sin x - \cos x,$$

όπου το b είναι λύση της εξίσωσης

$$\sin b = \frac{1}{2}.$$

5.2 Η μέθοδος βολής για γραμμικά προβλήματα

Θεωρούμε το πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$y'' = f(x, y, y'), \quad x \in [a, b], \quad y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta.$$

Αν αντί του $y(b)$ γνωρίζαμε το $y'(a)$ θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε μία μέθοδο από αυτές που εξετάσαμε στα προηγούμενα κεφάλαια για την αριθμητική επίλυση προβλημάτων αρχικών τιμών.

Στη μέθοδο βολής υποθέτουμε ότι γνωρίζουμε μία τιμή για το $y'(a)$ και βάλουμε προς το $x = b$. Συγκρίνουμε την τιμή του $y(b)$ που παίρνουμε με το β και ακολούθως προσπαθούμε με συστηματικό τρόπο να τροποποιήσουμε την τιμή του $y'(a)$ για να πάρουμε το σωστό $y(b)$.

Έστω ότι εξετάζουμε το πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$y'' + f(x) y' + g(x) y = k(x)$$

με τις πεπλεγμένες συνθήκες

$$\alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) + \alpha_2 y(b) + \alpha_3 y'(b) = \alpha_4,$$

$$\beta_0 y(a) + \beta_1 y'(a) + \beta_2 y(b) + \beta_3 y'(b) = \beta_4.$$

Η γενική λύση δίδεται από την έκφραση

$$y = y^{(p)} + A_1 y^{(1)} + A_2 y^{(2)},$$

όπου η ειδική λύση $y^{(p)}$ ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση και τις αρχικές συνθήκες

$$y^{(p)}(a) = 0, \quad y^{(p)'}(a) = 0,$$

και οι ανεξάρτητες λύσεις $y^{(1)}$ και $y^{(2)}$ ικανοποιούν την ομογενή διαφορική εξίσωση και τις αρχικές συνθήκες

$$y^{(1)}(a) = 1, \quad y^{(1)'}(a) = 0, \quad y^{(2)}(a) = 0, \quad y^{(2)'}(a) = 1,$$

αντίστοιχα.

Μπορούμε να λύσουμε τα τρία προβλήματα αρχικών τιμών με μία από τις γνωστές μεθόδους. Ακολούθως, θέλουμε η λύση μας να ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες

$$\begin{aligned} & \left\{ \alpha_0 + \alpha_2 y^{(1)}(b) + \alpha_3 y^{(1)'}(b) \right\} A_1 + \left\{ \alpha_1 + \alpha_2 y^{(2)}(b) + \alpha_3 y^{(2)'}(b) \right\} A_2 \\ & = \alpha_4 - \alpha_2 y^{(p)}(b) - \alpha_3 y^{(p)'}(b), \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} & \left\{ \beta_0 + \beta_2 y^{(1)}(b) + \beta_3 y^{(1)'}(b) \right\} A_1 + \left\{ \beta_1 + \beta_2 y^{(2)}(b) + \beta_3 y^{(2)'}(b) \right\} A_2 \\ & = \beta_4 - \beta_2 y^{(p)}(b) - \beta_3 y^{(p)'}(b). \end{aligned}$$

Η λύση του πιο πάνω 2×2 συστήματος μας δίνει τα A_1 και A_2 , δηλαδή την λύση του προβλήματος συνοριακών τιμών.

Για λόγους ελέγχου, θα μπορούσαμε να λύσουμε το πρόβλημα αρχικών τιμών με τις αρχικές συνθήκες $y(a) = A_1$, $y'(a) = A_2$ και να επαληθεύσουμε τις συνοριακές συνθήκες.

Για το πιο πάνω πρόβλημα χρειάστηκε να λύσουμε τρία προβλήματα αρχικών τιμών.

Πιο ευνοϊκές συνοριακές συνθήκες μειώνουν το πλήθος των προβλημάτων αρχικών τιμών κατά ένα.

Για παράδειγμα, αν οι συνοριακές συνθήκες είναι

$$y(a) = \alpha_4, \quad \beta_0 y(a) + \beta_1 y'(a) + \beta_2 y(b) + \beta_3 y'(b) = \beta_4,$$

μας χρειάζεται μόνο το $y'(a)$ για να μετατρέψουμε το πρόβλημά μας σε πρόβλημα αρχικών τιμών.

Το $\bar{y}^{(p)} = y^{(p)} + A_1 y^{(1)} = y^{(p)} + \alpha_4 y^{(1)}$ ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση και τις αρχικές συνθήκες

$$\bar{y}^{(p)}(a) = \alpha_4, \quad \bar{y}^{(p)'}(a) = 0.$$

Η πρώτη από τις συνοριακές συνθήκες ικανοποιείται αυτόματα από την λύση $y = \bar{y}^{(p)} + A_2 y^{(2)}$. Από την ικανοποίηση της δεύτερης, έχουμε ότι

$$\left\{ \beta_1 + \beta_2 y^{(2)}(b) + \beta_3 y^{(2)'}(b) \right\} A_2 = \beta_4 - \beta_0 \alpha_4 - \beta_2 \bar{y}^{(p)}(b) - \beta_3 \bar{y}^{(p)'}(b),$$

που μας δίνει το A_2 , δηλαδή τη λύση.

Με αυτές τις συνοριακές συνθήκες χρειάστηκε να λύσουμε μόνο δύο προβλήματα αρχικών τιμών, ένα για το $\bar{y}^{(p)}$ και ένα για το $y^{(2)}$.

Πιο γενικά, εξετάζουμε το πρόβλημα συνοριακών τιμών (σύστημα $N \times N$)

$$\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y} + \mathbf{q}(x), \quad x \in [a, b]$$

με συνοριακές συνθήκες

$$B_a \mathbf{y}(a) + B_b \mathbf{y}(b) = \boldsymbol{\beta}.$$

Αντι του ανωτέρω προβλήματος εξετάζουμε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y} + \mathbf{q}(x), \quad x \in [a, b]$$

με αρχικές συνθήκες

$$\mathbf{y}(a) = \mathbf{s},$$

όπου το \mathbf{s} είναι σταθερό (άγνωστο) διάνυσμα.

Η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι η

$$\mathbf{y}(x) = Y(x)\mathbf{s} + \mathbf{v}(x).$$

Ο πίνακας $Y(x) \in \mathbb{R}^{N,N}$ ικανοποιεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$Y' = A(x)Y, \quad x \in [a, b], \quad Y(a) = I$$

ενώ η ειδική λύση $\mathbf{v}(x)$ ικανοποιεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\mathbf{v}' = A(x)\mathbf{v} + \mathbf{q}(x), \quad x \in [a, b], \quad \mathbf{v}(a) = \mathbf{0}.$$

Επομένως, για να βρούμε τη γενική λύση, πρέπει να λύσουμε $N + 1$ προβλήματα αρχικών τιμών.

Έχοντας υπολογίσει τα $\mathbf{v}(x)$ και $Y(x)$, από την

$$B_a [Y(a)\mathbf{s} + \mathbf{v}(a)] + B_b [Y(b)\mathbf{s} + \mathbf{v}(b)] = \boldsymbol{\beta}$$

έχουμε το σύστημα $N \times N$

$$[B_a + B_b Y(b)] \mathbf{s} = \boldsymbol{\beta} - B_b \mathbf{v}(b)$$

από το οποίο παίρνουμε το \mathbf{s} , δηλαδή τη λύση.

Σημείωση: Το πιο πάνω ισχύει με την προϋπόθεση ότι ο πίνακας $[B_a + B_b Y(b)]$ είναι αντιστρέψιμος.

Παράδειγμα: Να εφαρμοσθεί η μέθοδος βολής στο πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad x \in [0, \beta],$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(\beta) \\ y_2(\beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ e^\beta \end{pmatrix}, \quad \beta > 0.$$

Παράδειγμα: Να εφαρμοσθεί η μέθοδος βολής στο πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$y'' - c_1(x) y' - c_0(x) y = q(x), \quad x \in [a, b], \quad y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta.$$

5.3 Η μέθοδος βολής για μη-γραμμικά προβλήματα

Η εφαρμογή της μεθόδου βολής γίνεται πιο περίπλοκη για μη-γραμμικά προβλήματα.

Για παράδειγμα, εξετάζουμε το μη-γραμμικό πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$y''' + y y'' + \beta(y'^2 - 1) = 0, \quad y(0) = y'(0) = 0, \quad y'(b) = 1,$$

για δεδομένα β και b .

Η παράμετρος η οποία μετατρέπει το πιο πάνω πρόβλημα συνοριακών τιμών σε πρόβλημα αρχικών τιμών είναι το $y''(0) = t$.

Επιλύουμε το πρόβλημα αρχικών τιμών για κάποια τιμή του t και με κάποιο συστηματικό τρόπο προσπαθούμε να βρούμε ένα t για το οποίο $y'(b) = 1$.

Στην ουσία αυτό ισοδυναμεί με την επίλυση της μη-γραμμικής εξίσωσης $y'(b) = 1$ για το t .

Αν χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο Newton, παίρνουμε

$$t^{(n+1)} = t^{(n)} - \frac{y^{(n)'}(b) - 1}{\frac{\partial}{\partial t}[y^{(n)'}(b) - 1]} = t^{(n)} - \frac{y^{(n)'}(b) - 1}{y_t^{(n)'}(b)}.$$

Το $t^{(0)}$ είναι η αρχική προσέγγιση του t . Το $t^{(n)}$ χρειάζεται για τον υπολογισμό των $y^{(n)}(b)$, $y_t^{(n)}(b)$, $y^{(n)'}(b)$ και $y_t^{(n)'}(b)$.

Το $y^{(n)}(x)$ υπολογίζεται από το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y''' + y y'' + \beta(y'^2 - 1) = 0, \quad y(0) = y'(0) = 0, \quad y''(0) = t.$$

Το $y_t^{(n)}(x)$ υπολογίζεται από το πρόβλημα (μεταβολών) αρχικών τιμών

$$y_t''' + y_t y_t'' + y_t y_t'' + 2\beta y_t' y_t' = 0, \quad y_t(0) = y_t'(0) = 0, \quad y_t''(0) = 1.$$

Σ'αυτό το πρόβλημα χρησιμοποιούμε το $y^{(n)}(x)$ που μόλις υπολογίσαμε.

Σημείωση: Τα $y^{(n)'}(b)$ και $y_t^{(n)'}(b)$ τα υπολογίζουμε αυτόματα με την αριθμητική μέθοδο.

Σημείωση: Στην κάθε επανάληψη της μεθόδου Newton είναι αναγκαία η επίλυση δύο προβλημάτων αρχικών τιμών.

Στο προηγούμενο παράδειγμα οι συνοριακές συνθήκες ήταν διαχωρισμένες και είχαμε μόνο μία παράμετρο.

Τώρα εξετάζουμε παράδειγμα στο οποίο οι συνθήκες είναι πεπλεγμένες και χρειαζόμαστε δύο παραμέτρους

$$y' = y^2 + z^2, \\ z' = \sin(yz), \quad x \in [a, b],$$

με συνοριακές συνθήκες

$$g_1(y(a), y(b), z(a), z(b)) = y(a)^2 + z(a)y(b) + y(a)\sin y(b) - \frac{3}{2} = 0,$$

και

$$g_2(y(a), y(b), z(a), z(b)) = y(a)z(b) - e^{y(a)}\sin y(b) + z(a) = 0.$$

Για να κατασκευάσουμε πρόβλημα αρχικών τιμών χρειαζόμαστε τα $y(a)$ και $z(a)$ (ή τα $y(b)$ και $z(b)$).

Επομένως, επιλέγουμε τις παραμέτρους

$$y(a) = p, \quad z(a) = q.$$

Οι μη-γραμμικές εξισώσεις που πρέπει να λύσουμε γίνονται

$$g_1(p, q) = 0, \quad g_2(p, q) = 0.$$

Η μέθοδος Newton δίνει

$$\frac{\partial g_1}{\partial p} \delta p^{(n)} + \frac{\partial g_1}{\partial q} \delta q^{(n)} + g_1(p^{(n)}, q^{(n)}) = 0,$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial p} \delta p^{(n)} + \frac{\partial g_2}{\partial q} \delta q^{(n)} + g_2(p^{(n)}, q^{(n)}) = 0,$$

όπου $\delta p^{(n)} = p^{(n+1)} - p^{(n)}$ και $\delta q^{(n)} = q^{(n+1)} - q^{(n)}$.

Προφανώς,

$$g_1 = p^2 + qy(b) + p\sin y(b) - \frac{3}{2} = 0,$$

$$g_2 = pz(b) - e^p \sin y(b) + q = 0,$$

και

$$\frac{\partial g_1}{\partial p} = 2p + qy_p(b) + \sin y(b) + py_p(b)\cos y(b),$$

$$\frac{\partial g_1}{\partial q} = y(b) + qy_q(b) + py_q(b)\cos y(b),$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial p} = z(b) + pz_p(b) - e^p \sin y(b) - e^p y_p(b)\cos y(b),$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial q} = p z_q(b) - e^p y_q(b) \cos y(b) + 1.$$

Στο κάθε βήμα της μεθόδου Newton επιλύουμε κατ'αρχήν το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{aligned} y' &= y^2 + z^2, \\ z' &= \sin(yz), \quad x \in [a, b], \end{aligned}$$

με αρχικές συνθήκες

$$y(a) = p, \quad z(a) = q,$$

που θα μας δώσει τα $y(x)$, $z(x)$ και τα $y(b)$, $z(b)$.

Ακολουθώντας, επιλύουμε τα προβλήματα αρχικών τιμών

$$\begin{aligned} y'_p &= 2 y y_p + 2 z z_p, \\ z'_p &= (y_p z + y z_p) \cos(yz), \quad x \in [a, b], \end{aligned}$$

με αρχικές συνθήκες

$$y_p(a) = 1, \quad z_p(a) = 0,$$

που δίνει τα $y_p(x)$, $z_p(x)$ και τα $y_p(b)$, $z_p(b)$, και το

$$\begin{aligned} y'_q &= 2 y y_q + 2 z z_q, \\ z'_q &= (y_q z + y z_q) \cos(yz), \quad x \in [a, b], \end{aligned}$$

με αρχικές συνθήκες

$$y_q(a) = 0, \quad z_q(a) = 1,$$

που δίνει τα $y_q(x)$, $z_q(x)$ και τα $y_q(b)$, $z_q(b)$.

Στη γενική περίπτωση μη γραμμικού προβλήματος (σύστημα $N \times N$)

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}), \quad x \in [a, b],$$

με συνοριακές συνθήκες

$$\mathbf{g}(\mathbf{y}(a), \mathbf{y}(b)) = \mathbf{0},$$

στην εφαρμογή της μεθόδου βολής θεωρούμε ότι το $\tilde{\mathbf{y}}(x, \mathbf{s})$ είναι η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}), \quad x \in [a, b],$$

$$\mathbf{y}(a) = \mathbf{s}.$$

Για την εύρεση λύσης του προβλήματος συνοριακών τιμών πρέπει να βρούμε $\mathbf{s} = \mathbf{s}^*$ τέτοιο ώστε

$$\mathbf{g}(\mathbf{s}, \tilde{\mathbf{y}}(b, \mathbf{s})) = \mathbf{0}.$$

Αυτό είναι σύστημα μη-γραμμικών εξισώσεων ως προς το \mathbf{s} και μπορεί να λυθεί με τη μέθοδο Newton

$$\mathbf{s}^{(n+1)} = \mathbf{s}^{(n)} - [J^{(n)}]^{-1} \mathbf{g}(\mathbf{s}^{(n)}, \tilde{\mathbf{y}}(b, \mathbf{s}^{(n)}),$$

όπου ο πίνακας $J^{(n)} = \left(\frac{\partial g_i^{(n)}}{\partial s_j} \right)$.

Στο κάθε βήμα της επαναληπτικής μεθόδου,

- Από το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}), \quad x \in [a, b],$$

$$\mathbf{y}(a) = \mathbf{s},$$

βρίσκουμε το $\tilde{\mathbf{y}}(b)$.

- Ακολουθώς, από τα N προβλήματα αρχικών τιμών

$$\mathbf{y}'_{s_i} = \mathbf{f}_{s_i}(x, \mathbf{y}), \quad x \in [a, b],$$

$$\mathbf{y}_{s_i}(a) = \mathbf{e}_i, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

βρίσκουμε τα $\tilde{\mathbf{y}}_{s_i}(b)$, $i = 1, 2, \dots, N$, που περιέχονται στον πίνακα $J^{(n)}$.

Επομένως, στο κάθε βήμα της επαναληπτικής μεθόδου Newton πρέπει να λύσουμε $N + 1$ προβλήματα αρχικών τιμών.

Παράδειγμα: Να εφαρμοσθεί η μέθοδος βολής στο πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$y'' = -2y y', \quad x \in [0, 1], \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1.$$

5.4 Η μέθοδος βολής για προβλήματα ιδιοτιμών και προβλήματα ελευθέρου συνόρου

Έστω ότι εξετάζουμε το πρόβλημα

$$y'' + \lambda y = 0, \quad x \in [0, 1], \quad y(0) = y(1) = 0.$$

Η παράμετρος στη μέθοδο βολής είναι το λ , και για να κατασκευάσουμε πρόβλημα αρχικών τιμών αρκεί να πάρουμε την αρχική συνθήκη $y'(0) = 1$.

Επομένως, θέλουμε να βρούμε το λ ούτως ώστε η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών να ικανοποιεί την (μη-γραμμική) συνθήκη $y(1) = 0$ (ως προς το λ).

Η επαναληπτική μέθοδος Newton δίδεται από

$$\lambda^{(n+1)} = \lambda^{(n)} - \frac{y^{(n)}(1)}{y_{\lambda}^{(n)}(1)}$$

όπου το $y^{(n)}$ ικανοποιεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y'' + \lambda y = 0, \quad x \in [0, 1], \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1,$$

και το $y_{\lambda}^{(n)}$ το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y_{\lambda}'' + \lambda y_{\lambda} + y = 0, \quad x \in [0, 1], \quad y_{\lambda}(0) = 0, \quad y_{\lambda}'(0) = 0.$$

Η ιδέα αυτή μπορεί να εφαρμοσθεί και όταν οι συνθήκες είναι πιο γενικές. Για παράδειγμα, αν αντί της $y(0) = 0$ είχαμε την $y(0) + 5y'(0) = 0$, θα μπορούσαμε να κατασκευάσουμε το πρόβλημα αρχικών τιμών με αρχικές συνθήκες $y(0) = 1$ και $y'(0) = -\frac{1}{5}$. (Γιατί δεν πήραμε την συνθήκη $y(0) = 0$;))

Όταν έχουμε πεπλεγμένες συνθήκες όπως

$$y(1) + \frac{1}{2} y(0) = 0, \quad y'(1) - 2y'(0) = 0,$$

πρέπει να πάρουμε και δεύτερη παράμετρο εκτός του λ . Το πρόβλημα αρχικών τιμών έχει συνθήκες $y(0) = 1$ και $y'(0) = q$ και θέλουμε να βρούμε τα λ και q για να ικανοποιούνται οι (μη-γραμμικές) εξισώσεις

$$y(1) + \frac{1}{2} = 0, \quad y'(1) - 2q = 0.$$

Παρατήρηση: Αφού τα προβλήματα ιδιοτιμών έχουν άπειρες λύσεις, πώς μπορούμε να ξέρουμε σε ποία λύση συγκλίνει η μέθοδος βολής;

Η λύση στην οποία θα συγκλίνει η μέθοδος εξαρτάται από την αρχική προσέγγιση.

Για παράδειγμα, στο πρόβλημα ιδιοτιμών

$$y'' + \lambda y = 0, \quad x \in [0, 1], \quad y(0) = y(1) = 0,$$

με πρώτη προσέγγιση $\lambda^{(0)} = 0$ η μέθοδος βολής θα συγκλίνει στην μικρότερη ιδιοτιμή που είναι η $\lambda_0 = \pi^2$. Με πρώτη προσέγγιση $\lambda^{(0)} = 100$ η μέθοδος βολής θα συγκλίνει στην ιδιοτιμή $\lambda_2 = 9\pi^2$.

Το ερώτημα είναι κατά πόσο υπάρχει ιδιοτιμή μεταξύ των λ_0 και λ_2 .

Η απάντηση δίδεται από το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα. Έστω το πρόβλημα ιδιοτιμών Sturm - Liouville

$$[p(x)y']' + q(x)y + \lambda r(x)y = 0, \quad x \in [a, b],$$

με συνοριακές συνθήκες της μορφής

$$\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0, \quad \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0,$$

όπου $r(x) > 0$ στο (a, b) και $p(x) \geq 0$ στο $[a, b]$.

Οι ιδιοτιμές του προβλήματος αυτού είναι

$$\lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n < \dots$$

Η ιδιοσυνάρτηση y_n που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_n έχει ακριβώς n ρίζες στο (ανοικτό) διάστημα (a, b) .

Στο παράδειγμά μας η ιδιοσυνάρτηση που αντιστοιχεί στην $\lambda_0 = \pi^2$ είναι η $y_0 = A_0 \sin \pi x$ που δεν έχει ρίζα στο $(0, 1)$. Η ιδιοσυνάρτηση που αντιστοιχεί στην $\lambda_2 = 9\pi^2$ είναι η $y_2 = A_2 \sin 3\pi x$ που έχει δύο ρίζες στο $(0, 1)$ (ποιές;). Επομένως υπάρχει ιδιοτιμή μεταξύ των λ_0 και λ_2 .

Στο πρόβλημα ελευθέρου συνόρου

$$y'' + y = 1, \quad x \in [0, b], \quad y(0) = 0, \quad y(b) = 1, \quad y'(b) = 2,$$

όπου το b είναι άγνωστο, το αντίστοιχο πρόβλημα αρχικών τιμών είναι το

$$y'' + y = 1, \quad x \in [0, b], \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = q.$$

Θέλουμε να επιλέξουμε τα q και b με τρόπο ώστε να ικανοποιούνται οι (μη-γραμμικές) συνθήκες $y(b) = 1$, $y'(b) = 2$. Αυτό απαιτεί την εφαρμογή της επαναληπτικής μεθόδου του Newton σε σύστημα δύο μη-γραμμικών εξισώσεων σε δύο αγνώστους.

5.5 Επαγωγική αστάθεια μεθόδων βολής

Στις μεθόδους βολής γίνεται αντικατάσταση προβλημάτων συνοριακών τιμών με προβλήματα αρχικών τιμών. Υπάρχει επομένως ο κίνδυνος μετατροπής ενός εγγενώς ευσταθούς προβλήματος σε ασταθές πρόβλημα.

Ο κίνδυνος εισαγωγής αυτών των ασταθειών μπορεί να μειωθεί ή να αποφευχθεί με διάφορους τρόπους:

5.5.1 Βολή στην αντίθετη κατεύθυνση

Μπορεί να δειχθεί ότι το πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$y_{n+1} - 7y_n - 8y_{n-1} = -\frac{7}{3}n + \frac{3}{2}, \quad y_0 = 0, \quad y_N = \frac{1}{6}N,$$

είναι εγγενώς ευσταθές. Αν εφαρμόσουμε τη μέθοδο βολής από το $n = 0$ το πρόβλημα αρχικών τιμών γίνεται ασταθές. Αν όμως εφαρμόσουμε τη μέθοδο βολής από το $n = N$ προς το $n = 0$, τότε το πρόβλημα αρχικών τιμών είναι ευσταθές.

5.5.2 Εξίσωση σε ενδιαμέσο σημείο

Η εφαρμογή της μεθόδου βολής στο πρόβλημα

$$y_{n+1} - 10.1y_n + y_{n-1} = -1.35n, \quad y_0 = 0, \quad y_N = \frac{1}{6}N,$$

από το $n = 0$ δίνει πρόβλημα αρχικών τιμών που είναι ασταθές λόγω της συμπληρωματικής λύσεως 10^n . Βολή στην αντίθετη κατεύθυνση (από το $n = N$ προς το $n = 0$) δίνει πρόβλημα αρχικών τιμών που είναι ασταθές λόγω των συμπληρωματικής λύσεως 10^{N-n} .

Σ'αυτή την περίπτωση, μπορούμε να αποφύγουμε μεγάλες τιμές του N βάλλοντας και από τα δύο άκρα και εξισώνοντας σε κάποιο ενδιαμέσο σημείο.

Για το συγκεκριμένο παράδειγμα, θα είχαμε

1. Βολή από το $n = 0$ και υπολογισμός των $u_n^{(f)}$ και $v_n^{(f)}$, $n = 2, 3, \dots, m$, από τα προβλήματα αρχικών τιμών

$$y_{n+1} - 10.1y_n + y_{n-1} = -1.35n, \quad y_0 = 0, \quad y_1 = 0,$$

και

$$y_{n+1} - 10.1y_n + y_{n-1} = 0, \quad y_0 = 0, \quad y_1 = 1,$$

αντίστοιχα.

2. Βολή από το $n = N$ και υπολογισμός των $u_n^{(b)}$ και $v_n^{(b)}$, $n = N-2, N-3, \dots, m-1$, από τα προβλήματα αρχικών τιμών

$$y_{n+1} - 10.1y_n + y_{n-1} = -1.35n, \quad y_N = \frac{1}{6}N, \quad y_{N-1} = 0,$$

και

$$y_{n+1} - 10.1y_n + y_{n-1} = 0, \quad y_N = 0, \quad y_{N-1} = 1,$$

αντίστοιχα.

3. Το $y_n^{(f)} = u_n^{(f)} + q_f v_n^{(f)}$ ικανοποιεί την εξίσωση και την πρώτη συνθήκη (στο $n = 0$), ενώ το $y_n^{(b)} = u_n^{(b)} + q_b v_n^{(b)}$ ικανοποιεί την εξίσωση και τη δεύτερη συνθήκη (στο $n = N$).

Τα q_f και q_b (και επομένως η λύση) βρίσκονται από την ισότητα των δύο λύσεων στα σημεία $n = m-1$ και $n = m$

$$u_{m-1}^{(f)} + q_f v_{m-1}^{(f)} = u_{m-1}^{(b)} + q_b v_{m-1}^{(b)}, \quad u_m^{(f)} + q_f v_m^{(f)} = u_m^{(b)} + q_b v_m^{(b)}.$$

5.5.3 Μέθοδος πολλαπλών βολών

Τα διαστήματα μπορούν να γίνουν ακόμη μικρότερα. Για το πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$y'' = f(x, y, y'), \quad x \in [a, b], \quad y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta,$$

υποδιαιρούμε το διάστημα $[a, b]$ σε υποδιαστήματα, για παράδειγμα στα τρία υποδιαστήματα $[a, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup [x_2, b]$, $a < x_1 < x_2 < b$.

Στη μέθοδο βολής επιλύουμε τα προβλήματα αρχικών τιμών για τα y_1, y_2 και y_3

$$y'' = f(x, y, y'), \quad x \in [a, x_1], \quad y(a) = \alpha, \quad y'(a) = q_1,$$

$$y'' = f(x, y, y'), \quad x \in [x_1, x_2], \quad y(x_1) = p_2, \quad y'(x_1) = q_2,$$

και

$$y'' = f(x, y, y'), \quad x \in [x_2, b], \quad y(x_2) = p_3, \quad y'(x_2) = q_3,$$

αντίστοιχα.

Θέλουμε να επιλέξουμε τα q_1, q_2, q_3, p_2 και p_3 ούτως ώστε να ικανοποιούνται οι εξισώσεις συνέχειας στα σημεία $x = x_1$ και $x = x_2$ καθώς και η συνθήκη στο $x = b$,

$$y_1(x_1, q_1) - p_2 = 0, \quad y_1'(x_1, q_1) - q_2 = 0,$$

$$y_2(x_2, p_2, q_2) - p_3 = 0, \quad y_2'(x_2, p_2, q_2) - q_3 = 0,$$

και

$$y_3(b, p_3, q_3) - \beta = 0.$$

Για την επίλυση του πιο πάνω συστήματος πέντε (μη-γραμμικών) εξισώσεων σε πέντε αγνώστους μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο Newton.

5.6 Μέθοδοι πεπερασμένων διαφορών για προβλήματα συνοριακών τιμών

5.6.1 Προβλήματα δευτέρας τάξεως

Στο πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$y'' + f(x) y' + g(x) y = k(x), \quad x \in [a, b], \quad y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta,$$

με το γνωστό συμβολισμό χρησιμοποιούμε τις προσεγγίσεις κεντρικών διαφορών

$$y_n' \approx \frac{y(x_{n+1}) - y(x_{n-1}))}{2h}$$

και

$$y_n'' \approx \frac{y(x_{n+1}) - 2y(x_n) + y(x_{n-1}))}{h^2}.$$

Επιλέγουμε τα σημεία $\{x_n\}_{n=0}^N$ στο διάστημα $[a, b]$ ούτως ώστε

$$x_n = a + n \frac{b-a}{N}, \quad n = 0, 1, \dots, N.$$

Συμβολίζουμε με Y_n την προσέγγιση του $y(x_n)$ και αντικαθιστούμε τη διαφορική εξίσωση με την εξίσωση

$$(1 + \frac{1}{2} h f_n) Y_{n+1} - (2 - h^2 g_n) Y_n + (1 - \frac{1}{2} h f_n) Y_{n-1} = h^2 k_n.$$

Μ'αυτόν τον τρόπο έχουμε το σύστημα

$$-(2 - h^2 g_1) Y_1 + (1 + \frac{1}{2} h f_1) Y_2 = h^2 k_1 - (1 - \frac{1}{2} h f_1) \alpha,$$

$$(1 - \frac{1}{2} h f_2) Y_1 - (2 - h^2 g_2) Y_2 + (1 + \frac{1}{2} h f_2) Y_3 = h^2 k_2,$$

⋮

$$(1 - \frac{1}{2} h f_{N-2}) Y_{N-3} - (2 - h^2 g_{N-2}) Y_{N-2} + (1 + \frac{1}{2} h f_{N-2}) Y_{N-1} = h^2 k_{N-2},$$

$$(1 - \frac{1}{2} h f_{N-1}) Y_{N-2} - (2 - h^2 g_{N-1}) Y_{N-1} = h^2 k_{N-1} - (1 + \frac{1}{2} h f_{N-1}) \beta,$$

δηλαδή έχουμε $(N-1) \times (N-1)$ τριδιαγώνιο σύστημα της μορφής

$$A \mathbf{Y} = \mathbf{k},$$

όπου

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ c_2 & a_2 & b_2 & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & c_{N-2} & a_{N-2} & b_{N-2} \\ 0 & \cdots & 0 & c_{N-1} & a_{N-1} \end{pmatrix}$$

και

$$a_i = -(2 - h^2 g_i), \quad i = 1, 2, \dots, N-1,$$

$$b_i = 1 + \frac{1}{2} h f_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-2,$$

$$c_i = 1 - \frac{1}{2} h f_i, \quad i = 2, 3, \dots, N-1.$$

Ως γνωστόν, συστήματα της μορφής αυτής μπορούν να επιλυθούν οικονομικά και αποτελεσματικά.

Αν αντί της πρώτης συνθήκης $y(a) = \alpha$ έχουμε τη συνθήκη $y(a) + q y'(a) = r$, προστίθενται στους αγνώστους τα Y_0 και το Y_{-1} . Αντί $N-1$ εξισώσεων, έχουμε τώρα $N+1$ εξισώσεις, εκ των οποίων οι τρεις πρώτες είναι οι

$$-q Y_{-1} + 2h Y_0 + q Y_1 = 2hr,$$

$$(1 - \frac{1}{2} h f_0) Y_{-1} - (2 - h^2 g_0) Y_0 + (1 + \frac{1}{2} h f_0) Y_1 = h^2 k_0$$

και

$$(1 - \frac{1}{2} h f_1) Y_0 - (2 - h^2 g_1) Y_1 + (1 + \frac{1}{2} h f_1) Y_2 = h^2 k_1.$$

Οι υπόλοιπες $N-2$ εξισώσεις είναι οι ίδιες με τις $N-2$ εξισώσεις της προηγούμενης περίπτωσης (πλην της πρώτης).

Το σύστημα δεν είναι πλέον τριδιαγώνιο αλλά η απαλοιφή του Y_{-1} από τις δύο πρώτες εξισώσεις το καθιστά τριδιαγώνιο. (Πώς;)

Ανάλογα, μπορούμε να χειριστούμε και τις πεπλεγμένες συνθήκες

$$y(a) + q_1 y'(a) + r_1 y(b) = s_1, \quad y(b) + q_2 y'(b) + r_2 y(a) = s_2.$$

5.6.2 Προβλήματα τετάρτης τάξεως

Στο πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$y^{(iv)} + f(x)y^{(iii)} + g(x)y'' + h(x)y' + k(x)y = \ell(x),$$

$$y(a) = 0, \quad y'(a) = 0, \quad y(b) = 0, \quad y'(b) = 0,$$

με τις επιπλέον προσεγγίσεις

$$y_n^{iv} \approx \frac{y_{n+2} - 4y_{n+1} + 6y_n - 4y_{n-1} + y_{n-2}}{h^4},$$

$$y_n^{iii} \approx \frac{y_{n+2} - 2y_{n+1} + 2y_{n-1} - y_{n-2}}{2h^3},$$

η διαφορική εξίσωση αντικαθίσταται από τη εξίσωση διαφορών

$$\begin{aligned} (1 + \frac{1}{2}hf_n)Y_{n+2} - (4 + hf_n - h^2g_n - \frac{1}{2}h^3h_n)Y_{n+1} + (6 - 2h^2g_n + h^4k_n)Y_n \\ - (4 - hf_n - h^2g_n + \frac{1}{2}h^3h_n)Y_{n-1} + (1 - \frac{1}{2}hf_n)Y_{n-2} = h^4\ell_n. \end{aligned}$$

Το σύστημα που παίρνουμε σ'αυτή την περίπτωση είναι $(N+3) \times (N+3)$ πενταδιαγώνιο της μορφής

$$B\mathbf{Y} = \ell,$$

όπου

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & \cdots & & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ e_1 & d_1 & a_1 & b_1 & c_1 & 0 & \cdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & e_{N-1} & d_{N-1} & a_{N-1} & b_{N-1} & c_{N-1} \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 & 1 & \\ 0 & \cdots & & 0 & 1 & 0 & \end{pmatrix}$$

και

$$a_i = 6 - 2h^2g_i + h^4k_i,$$

$$b_i = -(4 + hf_i - h^2g_i - \frac{1}{2}h^3h_i),$$

$$c_i = 1 + \frac{1}{2}hf_i,$$

$$d_i = -(4 - hf_i - h^2g_i + \frac{1}{2}h^3h_i),$$

$$e_i = 1 - \frac{1}{2} h f_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1.$$

Και πάλι, συστήματα της μορφής αυτής μπορούν να επιλυθούν οικονομικά και αποτελεσματικά.

Ανάλογα, μπορούμε να χειριστούμε και τις συνθήκες

$$y(a) = 0, \quad y''(a) = 0, \quad y(b) = 0, \quad y''(b) = 0.$$

Ασκήσεις

1. Να εφαρμοσθεί η μέθοδος βολής στο πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ e^x \end{pmatrix}, \quad x \in [0, 1],$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(1) \\ y_2(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ e \end{pmatrix}.$$

2. Να εφαρμοσθεί η μέθοδος βολής στο πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$y''' = 2y'' + y' - 2y, \quad x \in [0, 1], \quad y(0) = y'(0) = 1, \quad y(1) = y'(1).$$

3. Να εφαρμοσθεί η μέθοδος βολής στο πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 110 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad x \in [0, 10],$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(10) \\ y_2(10) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4. Να δοθεί το σύστημα που προκύπτει από τη μέθοδο πεπερασμένων διαφορών για το πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = k(x), \quad x \in [a, b],$$

$$\alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) + \gamma_1 y(b) + \delta_1 y'(b) = \epsilon_1,$$

$$\alpha_2 y(a) + \beta_2 y'(a) + \gamma_2 y(b) + \delta_2 y'(b) = \epsilon_2.$$

Υπάρχει τρόπος να επιλυθεί αποτελεσματικά το σύστημα αυτό;

5. Να δοθεί το σύστημα που προκύπτει από τη μέθοδο πεπερασμένων διαφορών για το πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$y^{(iv)} + f(x)y'' + h(x)y = \ell(x), \quad x \in [a, b],$$

$$y(a) = \alpha_1, \quad y''(a) = \alpha_2, \quad y(b) = \beta_1, \quad y''(b) = \beta_2.$$

Ποίος είναι ο πλέον αποτελεσματικός τρόπος επίλυσης του συστήματος;

6. • (α) Δίδεται το πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = k(x), \quad x \in [\alpha, \beta],$$

$$r_1 y(\alpha) + s_1 y'(\beta) = A, \quad r_2 y'(\alpha) + s_2 y(\beta) = B.$$

Να δοθεί το σύστημα γραμμικών εξισώσεων που πρέπει να επιλυθεί για να βρεθεί προσεγγιστική λύση στα σημεία $x_i = \alpha + ih$, $i = 1, \dots, N-1$, $h = \frac{\beta - \alpha}{N}$.

- (β) Να κατασκευασθεί το αντίστοιχο σύστημα στην περίπτωση που το πρόβλημα είναι

$$y'' + 10y = k(x), \quad x \in [\alpha, \beta], \quad y(\alpha) = 1, \quad y(\beta) = 1.$$

Από τις ιδιότητες του πίνακα του συστήματος, εξετάστε κατά πόσο το πρόβλημα έχει μοναδική λύση για κάθε $N \geq 2$.

- (γ) Να κατασκευασθεί το αντίστοιχο σύστημα στην περίπτωση που το πρόβλημα είναι

$$y^{(iv)} = f(x), \quad x \in [\alpha, \beta], \quad y(\alpha) = y''(\alpha) = 0, \quad y(\beta) = y''(\beta) = 0.$$

- (δ) Δείξτε ότι το πρόβλημα (γ) ανάγεται στην επίλυση δύο προβλημάτων της μορφής του προβλήματος (α). Να δοθούν τα αντίστοιχα συστήματα.

Κεφάλαιο 6

Προγράμματα

6.1 Κεφάλαιο 1

6.1.1 Πρόγραμμα 1: Υπολογιστικό Παράδειγμα 1.

```
function Example1(N)
%
% Solves the ivp  $y_{n+2} - (9/4)y_{n+1} + (1/2)y_n = 0$ 
%  $y_0=4/3, y_1=1/3$ 
%
fprintf('\n')
disp('_____')
disp('i          yclosed          yrec          ')
disp('_____')
%
ye=zeros(1,N);
yr=zeros(1,N);
ye(1,1:N)=(4/3)*(1/4).^ (0:N-1);
%
yr(1,1)=4/3;yr(1,2)=1/3;
for i=3:N
    y0=yr(1,i-2);y1=yr(1,i-1);
    yr(1,i)=-(1/2)*y0+(9/4)*y1;
end
%
for i=1:N
fprintf(' %5.0f %15.6e %15.6e\n',i-1,ye(1,i),yr(1,i))
end
xx=zeros(1,N);
xx(1,1:N)=(0:N-1);
plot(xx,ye,'r*',xx,yr,'b+')
xlabel('n','FontSize',14);ylabel('y_n','FontSize',14);
legend('Closed form','Recurrence',1)
```

6.1.2 Πρόγραμμα 2: Υπολογιστικό Παράδειγμα 1, αντίστοιχο πρόβλημα συνολικών τιμών.

```

function Example1a(N)
%
% Solves the bvp  $y_{n+2} - (9/4)y_{n+1} + (1/2)y_n = 0$ 
%  $y_0=4/3, y_N=0$ 
%
%
fprintf('\n')
disp('_____')
disp('i          yclosed          yrec          ')
disp('_____')
%
ye=zeros(1,N+1);
yr=zeros(1,N+1);
A=-(4/3)/(2^(3*N)-1);
B=(4/3)-A;
ye(1,1:N+1)=A*2.^(0:N)+B*(1/4).^(0:N);
%
yr(1,1)=4/3;yr(1,N+1)=0;
rhs=zeros(N-1,1);sol=zeros(N-1,1);
rhs(1,1)=-(1/2)*yr(1,1);
M=zeros(N-1,N-1);
M=gallery('tridiag',N-1,1/2,-9/4,1);
full(M)
sol=M\rhs;
yr(1,2:N)=sol(1:N-1,1);
%
for i=1:N+1
fprintf(' %5.0f %15.6e %15.6e\n',i-1,ye(1,i),yr(1,i))
end
xx=zeros(1,N+1);
xx(1,1:N+1)=(0:N);
plot(xx,ye,'r*',xx,yr,'b+')
xlabel('n','FontSize',14);ylabel('y_n','FontSize',14);
legend('Closed form','Recurrence',1)

```

6.1.3 Πρόγραμμα 3: Υπολογιστικό Παράδειγμα 2.

```

function Example2(N)
%
% Solves the ivp  $y_{n+4}-2y_{n+2}+y_n=0$ 
%  $y_0=0, y_1=0, y_2=0, y_3=1$ 
%
%
fprintf('\n')
disp('_____')
disp('i          yclosed          yrec          ')
disp('_____')
%
ye=zeros(1,N);
yr=zeros(1,N);
ye(1,1:N)=(1/4)*(-1+(0:N-1)+(1-(0:N-1)).*(-1).^(0:N-1));
%
yr(1,1)=0;yr(1,2)=0;yr(1,3)=0;yr(1,4)=1;
for i=5:N
    y0=yr(1,i-4);y1=yr(1,i-3);y2=yr(1,i-2);y3=yr(1,i-1);
    yr(1,i)=-y0+2*y2;
end
%
for i=1:N
fprintf(' %5.0f %15.6e %15.6e\n',i-1,ye(1,i),yr(1,i))
end
xx=zeros(1,N);
xx(1,1:N)=(0:N-1);
plot(xx,ye,'r*',xx,yr,'b+')
xlabel('n','FontSize',14);ylabel('y_n','FontSize',14);
legend('Closed form','Recurrence',2)

```

6.1.4 Πρόγραμμα 4: Άσκηση 8.

```

function Ex8Notes(N,k)
%
% Solves the ivp  $y_{n+2} - y_{n+1} - y_n = 0$ 
%  $y_0=0, y_1=k$ 
%
%
fprintf('\n')
disp('_____')
disp(' i          yclosed          yrec          ')
disp('_____')
%
ye=zeros(1,N);
yr=zeros(1,N);
ylim=zeros(1,N);
s1=(1+sqrt(5))/2;s2=(1-sqrt(5))/2;
ye(1,1:N)=(k/sqrt(5))*(s1.^(0:N-1)-s2.^(0:N-1));
%
yr(1,1)=0;yr(1,2)=k;
for i=3:N
    y0=yr(1,i-2);y1=yr(1,i-1);
    yr(1,i)=y0+y1;
end
%
ylim(1,3:N)=yr(1,3:N)./yr(1,2:N-1);
for i=1:N
fprintf(' %5.0f %15.6e %15.6e %15.6e\n',i-1,ye(1,i),yr(1,i),ylim(1,i))
end
xx=zeros(1,N);
xx(1,1:N)=(0:N-1);
plot(xx,ye,'r*',xx,yr,'b+')
xlabel('n','FontSize',14);ylabel('y_n','FontSize',14);
legend('Closed form','Recurrence',3)

```

6.2 Κεφάλαιο 2

6.2.1 Πρόγραμμα 1: Υπολογιστικό Παράδειγμα 1.

```

function Ch2Example1(N,a)
%
% Solves the ivp  $y_{n+1} - 10 y_n = -(2/3) n - (4/3)$ 
%  $y_0=a$ 
%
%
fprintf('\n')
disp('_____')
disp(' i          yrec          yclosed          abs error          rel error ')
disp('_____')
ye=zeros(1,N);
yr=zeros(1,N);
ye(1,1:N)=(1/6)*(1:N)+(a-(1/6))*10.^(0:N-1);
%
yr(1,1)=a;
for i=2:N
    y0=yr(1,i-1);
    yr(1,i)=10*y0-(3/2)*(i-2)-(4/3);
end
%
for i=1:N
fprintf(' %5.0f %15.6e %15.6e %15.6e %15.6e\n',i-1,yr(1,i),ye(1,i),...
abs(yr(1,i)-ye(1,i)),abs(yr(1,i)-ye(1,i))/abs(ye(1,i)))
end
xx=zeros(1,N);
xx(1,1:N)=(0:N-1);
plot(xx,ye,'r*',xx,yr,'b+')
xlabel('n','FontSize',14);ylabel('y_n','FontSize',14);
legend('Closed form','Recurrence',1)

```

6.2.2 Πρόγραμμα 2: Υπολογιστικό Παράδειγμα 2.

```

function Ch2Example2(N,a,b)
%
% Solves the ivp  $y_{n+1} - 10.1 y_n + y_{n-1} = 0$ 
%  $y_0=a, y_1=b$ 
%
%
fprintf('\n')
disp('_____')
disp(' i          yrec          yclosed          abs error          rel error')
disp('_____')
%
ye=zeros(1,N);
yr=zeros(1,N);
ye(1,1:N)=(10*b-a)/99*10.^(0:N-1)+((100*a-10*b)/99)*10.^(-(0:N-1));
%
yr(1,1)=a;yr(1,2)=b;
for i=3:N
    y0=yr(1,i-2);y1=yr(1,i-1);
    yr(1,i)=-y0+10.1*y1;
end
%
for i=1:N
fprintf(' %5.0f %15.6e %15.6e %15.6e %15.6e\n',i-1,yr(1,i),ye(1,i),...
abs(yr(1,i)-ye(1,i)),abs(yr(1,i)-ye(1,i))/abs(ye(1,i)))
end
xx=zeros(1,N);
xx(1,1:N)=(0:N-1);
plot(xx,ye,'r*',xx,yr,'b+')
xlabel('n','FontSize',14);ylabel('y_n','FontSize',14);
legend('Closed form','Recurrence',1)

```

6.2.3 Πρόγραμμα 3: Υπολογιστικό Παράδειγμα 3.

```

function Ch2Example3(N,a,b)
%
% Solves the ivp  $y_{n+1} - 10.1 y_n + y_{n-1} = -1.35 n$ 
%  $y_0=a, y_1=b$ 
%
%
fprintf('\n')
disp('_____')
disp(' i          yrec          yclosed          abs error          rel error ')
disp('_____')
%
ye=zeros(1,N);
yr=zeros(1,N);
%
B=(10/99)*(10*a-b+(1/6));A=a-B;
ye(1,1:N)=(1/6)*(0:N-1)+A*10.^(0:N-1)+B*10.^(-(0:N-1));
%
yr(1,1)=a;yr(1,2)=b;
for i=3:N
    y0=yr(1,i-2);y1=yr(1,i-1);
    yr(1,i)=-y0+10.1*y1-1.35*(i-2);
end
%
for i=1:N
fprintf(' %5.0f %15.6e %15.6e %15.6e %15.6e\n',i-1,yr(1,i),ye(1,i),...
abs(yr(1,i)-ye(1,i)),abs(yr(1,i)-ye(1,i))/abs(ye(1,i)))
end
xx=zeros(1,N);
xx(1,1:N)=(0:N-1);
plot(xx,ye,'r*',xx,yr,'b+')
xlabel('n','FontSize',14);ylabel('y_n','FontSize',14);
legend('Closed form','Recurrence',1)

```

6.2.4 Πρόγραμμα 4: Υπολογιστικό Παράδειγμα 4.

```

function Ch2Example4(N,b)
%
% Solves the ivp  $y_{n+1} - 10 y_n = -(2/3)n - (4/3)$ 
%  $y_N = b$ 
%
%
fprintf('\n')
disp('_____')
disp(' i          yrec          yclosed          abs error1          abs error2          rel error')
disp('_____')
ye=zeros(1,N+1);
yr=zeros(1,N+1);
yz=zeros(1,N+1);
%ye=(i+1)/6.0 + (b-((n+1.)/6.))*10.0^(i-n);
ye(1,1:N+1)=(1/6)*(1:N+1)+(b-(1/6)*(N+1))*10.^((0:N)-N);
yz=(1/6)*(1:N+1);
%
yr(1,N+1)=b;
for i=N:-1:1
    yN=yr(1,i+1);
    yr(1,i)=(1/10)*(yN+(3/2)*(i-1)+(4/3));
end
%
for i=1:N+1
fprintf(' %5.0f %15.6e %15.6e %15.6e %15.6e %15.6e\n',i-1,yr(1,i),...
ye(1,i),yz(1,i),abs(yr(1,i)-yz(1,i)),abs(yr(1,i)-yz(1,i))/abs(yz(1,i)))
end
xx=zeros(1,N+1);
xx(1,1:N+1)=(0:N);
plot(xx,ye,'r*',xx,yr,'b+')
xlabel('n','FontSize',14);ylabel('y_n','FontSize',14);
legend('Closed form','Recurrence',1)

```

6.2.5 Πρόγραμμα 5: Υπολογιστικό Παράδειγμα 5.

```

function Ch2Example5(N,a,b)
%
% Solves the bvp  $y_{n+1} - 10.1y_n + y_{n-1} = 0$ 
%  $y_0=a, y_N=b$ 
%
%
fprintf('\n')
disp('_____')
disp('      i          y_n          yclosed          abs error          rel error      ')
disp('_____')%
N1=N+1;
ye=zeros(1,N1);
yr=zeros(1,N1);
A=(b-a*10^(-N))/(10^N-10^(-N));
B=a-A;
ye(1,1:N1)=A*10.^(0:N)+B*(1/10).^(0:N);
%
yr(1,1)=a;yr(1,N+1)=b;
rhs=zeros(N-1,1);sol=zeros(N-1,1);
rhs(1,1)=-yr(1,1);
rhs(N-1,1)=-yr(1,N+1);
M=zeros(N-1,N-1);
M=gallery('tridiag',N-1,1,-10.1,1);
sol=M\rhs;
yr(1,2:N)=sol(1:N-1,1);
%
for i=1:N1
fprintf(' %5.0f %15.6e %15.6e %15.6e %15.6e\n',i-1,yr(1,i),ye(1,i),...
abs(yr(1,i)-ye(1,i)),abs((yr(1,i)-ye(1,i)))/abs(ye(1,i)))
end
xx=zeros(1,N1);
xx(1,1:N1)=(0:N);
plot(xx,ye,'r*',xx,yr,'b+')
xlabel('n','FontSize',14);ylabel('y_n','FontSize',14);
legend('Recurrence','Closed form',1)

```

6.3 Κεφάλαιο 3

6.3.1 Πρόγραμμα 1: Άμεση Μέθοδος του Euler: Υπολογιστικό Παράδειγμα 1.

```
function aeuler(n)
% Solves the ivp  $y' = y - 1/(1+x)^2 - 1/(1+x)$ ,  $y(0)=2$ 
% by the forward Euler method
%
fprintf('\n')
%
for iit=1:10
%
nn=2^(iit-1)*n;
uu(iit)=1/nn;
%
h=1/nn;
%
y=2;
%
for i=0:nn
t=i*h;
er(i+1)=0;
ex=exp(t)+(1/(1+t));
er(i+1)=abs(ex-y);
m=y- 1/(1+t)^2 - 1/(1+t);
y=y+h*m;
end
ul(iit)=max(er);
fprintf('h =%12.6f          maxerr = %15.6e\n',h,ul(iit))
end
ul';
loglog(uu,ul,'b+')
```

6.3.2 Πρόγραμμα 2: Έμμεση Μέθοδος του Euler: Υπολογιστικό Παράδειγμα 1.

```
function eeuler(n)
% Solves the ivp  $y' = y - 1/(1+x)^2 - 1/(1+x)$ ,  $y(0)=2$ 
% by the backward Euler method
%
fprintf('\n')
%
for iit=1:10
%
nn=2^(iit-1)*n;
uu(iit)=1/nn;
%
h=1/nn;
%
y=2;
%
for i=0:nn
t=i*h;
t1=(i+1)*h;
ex=exp(t)+(1/(1+t));
er(i+1)=abs(ex-y);
m= - 1/(1+t1)^2 - 1/(1+t1);
y=(y+h*m)/(1-h);
end
u1(iit)=max(er);
fprintf('h =%12.6f          maxerr = %15.6e\n',h,u1(iit))
end
u1';
loglog(uu,u1,'b+')
xlabel('h');ylabel('Error');
```

6.3.3 Πρόγραμμα 3: Μέθοδος του Κανόνα του Τραπεζίου: Υπολογιστικό Παράδειγμα 1.

```

function traprule(n)
% Solves the ivp  $y' = y - 1/(1+x)^2 - 1/(1+x)$ ,  $y(0)=2$ 
% by the trapezium rule method
%
fprintf('\n')
for iit=1:10
%
nn=2^(iit-1)*n;
uu(iit)=1/nn;
%
h=1/nn;
h2=h/2;
%
y=2;
%
for i=0:nn
t=i*h;
t1=(i+1)*h;
ex=exp(t)+(1/(1+t));
er(i+1)=abs(ex-y);
m= - 1/(1+t)^2 - 1/(1+t);
m1= - 1/(1+t1)^2 - 1/(1+t1);
y=((1+h2)*y+h2*(m+m1))/(1-h2);
end
u1(iit)=max(er);
fprintf('h =%12.6f          maxerr = %15.6e\n',h,u1(iit))
end
loglog(uu,u1,'b+')
xlabel('h');ylabel('Error');

```

6.3.4 Πρόγραμμα 4: Άμεση Μέθοδος του Euler: Υπολογιστικό Παράδειγμα 2.

```
function aeulerstab(n,el)
% Solves the ivp  $y' = el \cdot y - 1/(1+x)^2 - el/(1+x)$ ,  $y(0)=1$ 
% by the forward Euler method
%
fprintf('\n')
%
h=1./n;
hl=h*el;
fprintf('el =%12.6f      h = %12.6f   hl = %12.6f\n',el,h,hl)
fprintf('\n')
%
y=1.;
disp('      t      exact      error      relerror')
%
for i=0:n
t=i*h;
ex=(1/(1+t));
er=abs(ex-y);
reler=er/ex;
fprintf('%12.4f%15.6e%15.6e %15.6e\n',t,ex,er,reler)
m=el*y- 1/(1+t)^2 - el/(1+t);
y=y+h*m;
end
```

6.3.5 Πρόγραμμα 5: Έμμεση Μέθοδος του Euler: Υπολογιστικό Παράδειγμα 2.

```

function eeulerstab(n,el)
% Solves the ivp  $y' = el y - 1/(1+x)^2 - el/(1+x)$ ,  $y(0)=1$ 
% by the backward Euler method
%
fprintf('\n')
%
h=1./n;
hl=h*el;
fprintf('el =%12.6f          h = %12.6f   hl = %12.6f\n',el,h,hl)
fprintf('\n')
%
y=1.;
disp('          t          exact          error          relerror')
%
for i=0:n
t=i*h;
t1=(i+1)*h;
ex=(1/(1+t));
er=abs(ex-y);
reler=er/ex;
fprintf('%12.4f%15.6e%15.6e %15.6e\n',t,ex,er,reler)
m= - 1/(1+t1)^2 - el/(1+t1);
y=(y+h*m)/(1.-el*h);
end

```

6.3.6 Πρόγραμμα 6: Μέθοδος του Κανόνα του Τραπεζίου: Υπολογιστικό Παράδειγμα 2.

```

function trapstab(n,el)
% Solves the ivp  $y' = el y - 1/(1+x)^2 - el/(1+x)$ ,  $y(0)=1$ 
% by the trapezium rule method
%
fprintf('\n')
%
h=1./n;
h2=h/2.;
hl=h*el;
fprintf('el =%12.6f      h = %12.6f   hl = %12.6f\n',el,h,hl)
fprintf('\n')
%
y=1.;
disp('      t      exact      error      relerror')
%
for i=0:n
t=i*h;
t1=(i+1)*h;
ex=(1/(1+t));
er=abs(ex-y);
reler=er/ex;
fprintf('%12.4f%15.6e%15.6e %15.6e\n',t,ex,er,reler)
m= - 1/(1+t)^2 - el/(1+t);
m1=- 1/(1+t1)^2 - el/(1+t1);
a=(1.+el*h2);
b=h2*(m+m1);
c=(1.-el*h2);
y=(y*a+b)/c;
end

```

6.3.7 Πρόγραμμα 7: Μέθοδος του αναπτύγματος Taylor τρίτης/τετάρτης τάξεως: Υπολογιστικό Παράδειγμα 1.

```

function Taylor(n)
% Solves the ivp  $y' = y - 1/(1+x)^2 - 1/(1+x)$ ,  $y(0)=2$ 
% by the third order Taylor method
%
fprintf('\n')
%
for iit=1:9
%
nn=2^(iit-1)*n;
uu(iit)=1/nn;
%
h=1./nn;
y=2.;
u=0.;
%
for i=0:nn
t=i*h;
t1=(i+1)*h;
ex=exp(t)+(1/(1+t));
er(i+1)=abs(ex-y);
y=y+h*f1(t,y)+(h^2/2)*fx1(t,y)+(h^3/6)*fxx1(t,y);
%y=y+h*f1(t,y)+(h^2/2)*fx1(t,y)+(h^3/6)*fxx1(t,y)+(h^4/24)*fxxx1(t,y);
end
ul(iit)=max(er);
fprintf('h =%12.6f          maxerr = %15.6e\n',h,ul(iit))
end
fprintf('\n')
for iit=1:8
    p=log(ul(iit)/ul(iit+1))/log(2.);
    fprintf('h =%12.6f          rate %15.6e\n',uu(iit),p)
end
ul';
loglog(uu,ul,'b+');
xlabel('h');ylabel('Error');
function f=f1(x,y)
f=y-(1/(1+x)^2)-(1/(1+x));
function fx=fx1(x,y)
fx=y-(1/(1+x))+(2/(1+x)^3);
function fxx=fxx1(x,y)
fxx=y-(1/(1+x))-(6/(1+x)^4);
function fxxx=fxxx1(x,y)
fxxx=y-(1/(1+x))+(24/(1+x)^5);

```

6.3.8 Πρόγραμμα 8: Μέθοδος Runge-Kutta δευτέρας τάξεως: Υπολογιστικό Παράδειγμα 1.

```

function RungeKuttal(n)
% Solves the ivp  $y' = y - 1/(1+x)^2 - 1/(1+x)$ ,  $y(0)=2$ 
% using the second order R-K method
%
fprintf('\n')
%
for iit=1:10
%
nn=2^(iit-1)*n;
uu(iit)=1/nn;
%
h=1/nn;
%
y=2;
%
for i=0:nn
t=i*h;
t1=(i+1)*h;
ex=exp(t)+(1/(1+t));
er(i+1)=abs(ex-y);
k1=h*(y- 1/(1+t)^2 - 1/(1+t));
k2=h*(y+k1 - 1/(1+t1)^2 - 1/(1+t1));
y=y+0.5*(k1+k2);
end
u1(iit)=max(er);
fprintf('h =%12.6f          maxerr = %15.6e\n',h,u1(iit))
end
fprintf('\n')
for iit=1:9
    p=log(u1(iit)/u1(iit+1))/log(2.);
    fprintf('h =%12.6f          rate %15.6e\n',uu(iit),p)
end
loglog(uu,u1,'b+')
xlabel('h');ylabel('Error');

```

6.3.9 Πρόγραμμα 9: Κλασική μέθοδος Runge-Kutta τετάρτης τάξεως: Υπολογιστικό Παράδειγμα 1.

```

function RungeKutta4(n)
% Solves the ivp  $y' = y - 1/(1+x)^2 - 1/(1+x)$ ,  $y(0)=2$ 
% using the fourth order R-K method
%
fprintf('\n')
%
for iit=1:6
%
nn=2^(iit-1)*n;
uu(iit)=1/nn;
%
h=1/nn;%
y=2;
%
for i=0:nn
t=i*h;
t2=(i+0.5)*h;
t1=(i+1)*h;
ex=exp(t)+(1/(1+t));
er(i+1)=abs(ex-y);
k1=h*f1(t,y);
k2=h*f1(t2,y+0.5*k1);
k3=h*f1(t2,y+0.5*k2);
k4=h*f1(t1,y+k3);
y=y+(k1+2*k2+2*k3+k4)/6;
end
ul(iit)=max(er);
fprintf('h =%12.6f          maxerr = %15.6e\n',h,ul(iit))
end
fprintf('\n')
for iit=1:5
    p=log(ul(iit)/ul(iit+1))/log(2.);
    fprintf('h =%12.6f          rate %15.6e\n',uu(iit),p)
end
loglog(uu,ul,'b+')
xlabel('h');ylabel('Error');
%
function f=f1(x,y)
f=y-(1/(1+x)^2) -(1/(1+x));

```

6.4 Κεφάλαιο 4

6.4.1 Πρόγραμμα 1: Υπολογιστικό Παράδειγμα 1.

```

function multil(n)
% Solves the ivp  $y' = -y - 1/(1+x)^2 + 1/(1+x)$ ,  $y(0)=1$ 
% by the explicit three-step method
%  $Y_{n+1} + 9 Y_n - 9 Y_{n-1} - Y_{n-2} = 6 h (Y_n' + Y_{n-1}')$ 
%
fprintf('\n')
%
for iit=1:6
%
nn=2^(iit-1)*n;
uu(iit)=1/nn;
%
h=1./nn;
%
y0=1.;
y1=1./(1.0+h);
y2=1./(1.0+2.0*h);
%
for i=2:nn
t=i*h;
t1=(i-1)*h;
ex=(1/(1+t));
er(i)=abs(ex-y2);
m= -y2- 1/(1+t)^2 + 1/(1+t);
m1= -y1 - 1/(1+t1)^2 + 1/(1+t1);
y3=-9.0*y2+9.0*y1+y0+6.0*h*(m+m1);
y0=y1;
y1=y2;
y2=y3;
fprintf('point =%12.6f          error = %15.6e\n',t,er(i))
end
ul(iit)=max(er);
fprintf('h =%12.6f          maxerr = %15.6e\n',h,ul(iit))
end
fprintf('\n')
for iit=1:5
    p=log(ul(iit)/ul(iit+1))/log(2.);
    fprintf('h =%12.6f          rate %15.6e\n',uu(iit),p)
end
loglog(uu,ul,'b+')
xlabel('h');ylabel('Error');

```

6.4.2 Πρόγραμμα 2: Υπολογιστικό Παράδειγμα 2.

```

function multi2(n)
% Solves the ivp  $y' = -y - 1/(1+x)^2 + 1/(1+x)$ ,  $y(0)=1$ 
% by the implicit two-step method
%  $Y_{n+1} - Y_n = (h/12) (5 Y_{n+1}' + 8 Y_n' - Y_{n-1}')$ 
%
fprintf('\n')
%
for iit=1:10
%
nn=2^(iit-1)*n;
uu(iit)=1/nn;
%
h=1./nn;
%
h12=h/12.;
%
y0=1.;
y1=1./(1.0+h);
%
for i=1:nn
t=i*h;
t1=(i-1)*h;
t2=(i+1)*h;
ex=(1/(1+t));
er(i)=abs(ex-y1);
m= - 1/(1+t)^2 + 1/(1+t);
m1= - 1/(1+t1)^2 + 1/(1+t1);
m2= - 1/(1+t2)^2 + 1/(1+t2);
y2=(y1+h12*(5.*m2+8.*m-m1-8.*y1+y0))/(1.+5.*h12);
y0=y1;
y1=y2;
end
u1(iit)=max(er);
fprintf('h =%12.6f          maxerr = %15.6e\n',h,u1(iit))
end
fprintf('\n')
for iit=1:9
    p=log(u1(iit)/u1(iit+1))/log(2.);
    fprintf('h =%12.6f          rate %15.6e\n',uu(iit),p)
end
loglog(uu,u1,'b+')
xlabel('h');ylabel('Error');

```

6.4.3 Πρόγραμμα 3: Μέθοδος Adams - Bashforth: Υπολογιστικό Παράδειγμα 3(t).

```

function AB(n)
% Solves the ivp  $y' = -y - 1/(1+x)^2 + 1/(1+x)$ ,  $y(0)=1$ 
% by the three-step method A-B method
%  $Y_{n+1} - Y_n = (h/12) (23 Y_n' - 16 Y_{n-1}' + 5 Y_{n-2}')$ 
%
fprintf('\n')
%
for iit=1:10
%
nn=2^(iit-1)*n;
uu(iit)=1/nn;
h=1./nn;
h12=h/12.;
y0=1;
y1=1/(1+h);
y2=1/(1+2*h);
for i=4:nn+1
t=(i-1)*h;
t1=(i-2)*h;
t2=(i-3)*h;
t3=(i-4)*h;
ex=(1/(1+t));
m1= -y2- 1/(1+t1)^2 + 1/(1+t1);
m2= -y1- 1/(1+t2)^2 + 1/(1+t2);
m3= -y0 - 1/(1+t3)^2 + 1/(1+t3);
y3=y2+h12*(23*m1-16*m2+5*m3);
er(i)=abs(ex-y3);
y0=y1;
y1=y2;
y2=y3;
end
ul(iit)=max(er);
fprintf('h =%12.6f          maxerr = %15.6e\n',h,ul(iit))
end
fprintf('\n')
for iit=1:9
    p=log(ul(iit)/ul(iit+1))/log(2.);
    fprintf('h =%12.6f          rate %15.6e\n',uu(iit),p)
end
loglog(uu,ul,'b+')
xlabel('h');ylabel('Error');

```

6.4.4 Πρόγραμμα 4: Μέθοδος Adams - Bashforth: Υπολογιστικό Παράδειγμα 3(u).

```

function AB4(n)
% Solves the ivp  $y' = -y - 1/(1+x)^2 + 1/(1+x)$ ,  $y(0)=1$ 
% by the four-step method A-B method
%  $Y_{n+1} - Y_n = (h/24) (55 Y_n' - 59 Y_{n-1}' + 37 Y_{n-2}' - 9 Y_{n-3}')$ 
fprintf('\n')
for iit=1:10
nn=2^(iit-1)*n;
uu(iit)=1/nn;
h=1./nn;
h24=h/24;
y0=1;
y1=1/(1+h);
y2=1/(1+2*h);
y3=1/(1+3*h);
for i=5:nn+1
t=(i-1)*h;
t1=(i-2)*h;
t2=(i-3)*h;
t3=(i-4)*h;
t4=(i-5)*h;
ex=1/(1+t);
m1= -y3- 1/(1+t1)^2 + 1/(1+t1);
m2= -y2- 1/(1+t2)^2 + 1/(1+t2);
m3= -y1- 1/(1+t3)^2 + 1/(1+t3);
m4= -y0 - 1/(1+t4)^2 + 1/(1+t4);
y4=y3+h24*(55*m1-59*m2+37*m3-9*m4);
er(i)=abs(ex-y4);
y0=y1;
y1=y2;
y2=y3;
y3=y4;
end
ul(iit)=max(er);
fprintf('h =%12.6f          maxerr = %15.6e\n',h,ul(iit))
end
fprintf('\n')
for iit=1:9
    p=log(ul(iit)/ul(iit+1))/log(2.);
    fprintf('h =%12.6f          rate %15.6e\n',uu(iit),p)
end
loglog(uu,ul,'b+');
xlabel('h');ylabel('Error');

```

6.4.5 Πρόγραμμα 5: Μέθοδος BDF: Υπολογιστικό Παράδειγμα 4.

```

function BDF(n)
% Solves the ivp  $y' = -y - 1/(1+x)^2 + 1/(1+x)$ ,  $y(0)=1$ 
% by the three-step method BDF method
%  $Y_{n+1} - (18/11)Y_n + (9/11) Y_{n-1} - (2/11) Y_{n-2} = (6h/11) Y_{n+1}'$ 
%
%
fprintf('\n')
%
for iit=1:10
%
nn=2^(iit-1)*n;
uu(iit)=1/nn;
%
h=1./nn;
%
%
y0=1;
y1=1/(1+h);
y2=1/(1+2*h);
%
for i=4:nn+1
t=(i-1)*h;
t1=(i-2)*h;
t2=(i-3)*h;
t3=(i-4)*h;
ex=(1/(1+t));
m= - 1/(1+t)^2 + 1/(1+t);
y3=( (18/11)*y2-(9/11)*y1+(2/11)*y0+(6*h/11)*m )/(1+(6*h/11));
er(i)=abs(ex-y3);
y0=y1;
y1=y2;
y2=y3;
end
ul(iit)=max(er);
fprintf('h =%12.6f          maxerr = %15.6e\n',h,ul(iit))
end
fprintf('\n')
for iit=1:9
    p=log(ul(iit)/ul(iit+1))/log(2.);
    fprintf('h =%12.6f          rate %15.6e\n',uu(iit),p)
end
loglog(uu,ul,'b+')
xlabel('h');ylabel('Error');

```

6.4.6 Πρόγραμμα 6: Μέθοδος Adams - Μουλτον: Υπολογιστικό Παράδειγμα 5.

```

function AM(n)
% Solves the ivp  $y' = -y - 1/(1+x)^2 + 1/(1+x)$ ,  $y(0)=1$ 
% by the three-step method A-M method
%  $Y_{n+1} - Y_n = (h/24) (9 Y_{n+1}' + 19 Y_n' - 5 Y_{n-1}' + Y_{n-2}')$ 
%
fprintf('\n')
%
for iit=1:10
%
nn=2^(iit-1)*n;
uu(iit)=1/nn;
h=1/nn;
h24=h/24;
%
y0=1.;
y1=1./(1+h);
y2=1./(1+2*h);
%
for i=4:nn+1
t=(i-1)*h;
t1=(i-2)*h;
t2=(i-3)*h;
t3=(i-4)*h;
ex=(1/(1+t));
m= - 1/(1+t)^2 + 1/(1+t);
m1= -y2- 1/(1+t1)^2 + 1/(1+t1);
m2= -y1- 1/(1+t2)^2 + 1/(1+t2);
m3= -y0 - 1/(1+t3)^2 + 1/(1+t3);
y3=(y2+h24*(9*m+19*m1-5*m2+m3))/(1+9*h24);
er(i)=abs(ex-y3);
y0=y1;
y1=y2;
y2=y3;
end
u1(iit)=max(er);
fprintf('h =%12.6f          maxerr = %15.6e\n',h,u1(iit))
end
fprintf('\n')
for iit=1:9
    p=log(u1(iit)/u1(iit+1))/log(2.);
    fprintf('h =%12.6f          rate %15.6e\n',uu(iit),p)
end
loglog(uu,u1,'b+')
xlabel('h');ylabel('Error');

```

Βιβλιογραφία

- [1] Γ. Δ. Ακρίβης και Β. Α. Δουγαλής, *Εισαγωγή στην Αριθμητική Ανάλυση*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 1998.
- [2] Γ. Δ. Ακρίβης και Β. Α. Δουγαλής, *Αριθμητικές Μέθοδοι για Διαφορικές Εξισώσεις*, Ιωάννινα, 2000.
- [3] Γ. Δ. Ακρίβης και Β. Α. Δουγαλής, *Αριθμητικές Μέθοδοι για Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2006.
- [4] U. M. Ascher and L. R. Petzold, *Computer Methods for Ordinary Differential Equations and Differential-Algebraic Equations*, SIAM, Philadelphia, 1998.
- [5] U. M. Ascher, R. M. M. Mattheij and R. D. Russell, *Numerical Solution of Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations*, SIAM, Philadelphia, 1995.
- [6] K. A. Atkinson, *An Introduction to Numerical Analysis*, Second Edition, Wiley, New York, 1989.
- [7] K. A. Atkinson, W. Han and D. E. Stewart, *Numerical Solution of Ordinary Differential Equations*, Wiley, New York, 2009.
- [8] G. J. Borse, *Numerical Methods with MATLAB*, PWS Publishing Company, Boston, 1997.
- [9] W. E. Boyce and R. C. DiPrima, *Elementary Differential Equations*, Sixth Edition, Wiley, New York, 1997.
- [10] Α. Γέγιος, *Αριθμητικές Μέθοδοι, Τόμοι 1 και 2*, Ιωάννινα, 1987.
- [11] E. A. Coddington, *An Introduction to Ordinary Differential Equations*, Dover, New York, 1961.
- [12] E. A. Coddington and R. Carlson, *Linear Ordinary Differential Equations*, SIAM, Philadelphia, 1997.
- [13] M. Crouzeix et A. L. Mignot, *Analyse Numérique des Équations Différentielles*, 2^e Édition, Masson, Paris, 1992.
- [14] P. J. Davis and P. Rabinowitz, *Methods of Numerical Integration*, Academic Press, New York, 1975.
- [15] L. Fox and D. F. Mayers, *Numerical Solution of Ordinary Differential Equations for Scientists and Engineers*, Chapman and Hall, New York, 1987.
- [16] G. Hall and J. M. Watt, *Modern Numerical Methods for Ordinary Differential Equations*, Clarendon Press, Oxford, 1976.

-
- [17] E. L. Ince, *Ordinary Differential Equations* Dover, New York, 1956.
- [18] E. Isaacson and H. B. Keller, *Analysis of Numerical Methods*, Wiley, New York, 1966.
- [19] A. Iserles, *A First Course in the Numerical Analysis of Differential Equations*, Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
- [20] A. Kharab and R. B. Guenther, *An Introduction to Numerical Methods: A MATLAB Approach*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, 2002.
- [21] J. D. Lambert, *Numerical Methods for Ordinary Differential Equations*, Wiley, Chichester, 1991.
- [22] R. J. Schilling and S. L. Harris, *Applied Numerical Methods for Engineers using MATLAB and C*, Brooks/Cole Publishing Company, Pacific Grove, 2000.
- [23] L. F. Shampine, *Numerical Solution of Ordinary Differential Equations*, Chapman and Hall, New York, 1994.
- [24] G. W. Stewart, *Afternotes on Numerical Analysis*, SIAM, Philadelphia, 1996.
- [25] J. Stoer and R. Bulirsch, *Introduction to Numerical Analysis*, Second Edition, Springer-Verlag, New York, 1993.