

**ΜΑΣ 471/671 - ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΣΥΝΗΘΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ**

ΔΕΥΤΕΡΗ ΕΝΔΙΑΜΕΣΗ ΕΞΕΤΑΣΗ

6 Απριλίου 2012

Εαρινό Εξάμηνο 2011-12

ΟΝΟΜΑ :

Άσκηση	1	2	Βαθμός
Μονάδες	12	13	25

1. Να δοθεί ο γενικός τύπος μεθόδου  $\kappa$ -βημάτων για την αριθμητική επίλυση του προβλήματος αρχικών τιμών  $y' = f(x, y)$ ,  $y(a) = \alpha$ .

(i) Να δοθεί ο τύπος για το τοπικό σφάλμα αποκοπής για την ανωτέρω μέθοδο.

(ii) Ποιές συνθήκες πρέπει να ικανοποιούνται για να είναι μία μέθοδος συνεπής; Πότε λέμε ότι μία μέθοδος είναι μηδέν ευσταθής;

(iii) Πότε λέμε ότι μία μέθοδος είναι ευσταθής (σε σχέση με την εξίσωση  $y' = \lambda y$ ,  $\lambda < 0$ );

(iv) Να κατασκευασθεί η ακριβέστερη άμεση διβηματική μέθοδος.

(α) Να εξετασθεί κατά πόσον η ανωτέρω μέθοδος είναι συνεπής.

(β) Να εξετασθεί κατά πόσον η ανωτέρω μέθοδος είναι μηδέν ευσταθής.

(γ) Να διερευνηθεί η ευστάθεια της ανωτέρω μεθόδου σε σχέση με την εξίσωση  $y' = \lambda y$ ,  $\lambda < 0$ .

2. Να δοθούν οι γενικοί τύποι των μεθόδων  $\kappa$ -βημάτων Adams-Bashforth, BDF και Adams-Moulton για την αριθμητική επίλυση του προβλήματος αρχικών τιμών  $y' = f(x, y)$ ,  $y(a) = \alpha$ .

(i) Να κατασκευασθούν οι διβηματικές μέθοδοι Adams-Bashforth, Adams-Moulton και BDF.

(α) Να εξετασθεί κατά πόσον οι ανωτέρω μέθοδοι είναι συνεπείς.

(β) Να εξετασθεί κατά πόσον οι ανωτέρω μέθοδοι είναι μηδέν ευσταθείς.

(γ) Να διερευνηθεί η ευστάθεια των ανωτέρω μεθόδων σε σχέση με την εξίσωση  $y' = \lambda y$ ,  $\lambda < 0$ .

(ii) Να υπολογισθεί η ορίζουσα του πίνακα

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \dots & \lambda_m \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \dots & \lambda_m^2 \\ \lambda_1^3 & \lambda_2^3 & \lambda_3^3 & \dots & \lambda_m^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{m-1} & \lambda_2^{m-1} & \lambda_3^{m-1} & \dots & \lambda_m^{m-1} \end{pmatrix},$$

όπου  $m \in \mathbb{N}$  και  $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, m \in \mathbb{R}$ .

(iii) Εξετάζοντας τις ορίζουσες καταλλήλων πινάκων, ναδειχθεί ότι τα συστήματα που προκύπτουν στις μεθόδους  $\kappa$ -βημάτων (Adams-Bashforth, Adams-Moulton και BDF) έχουν μοναδική λύση.