



Πανεπιστήμιο Κύπρου
Τμήμα Μαθηματικών
και Στατιστικής

ΜΑΣ 471 - ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΣΥΝΗΘΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

ΠΡΩΤΗ ΕΝΔΙΑΜΕΣΗ ΕΞΕΤΑΣΗ

18 Φεβρουαρίου 2014

Εαρινό Εξάμηνο 2013-14

ΟΝΟΜΑ :

Άσκηση	1	2	3	Βαθμός
Μονάδες				

1. Να μελετηθεί η ευστάθεια του προβλήματος αρχικών τιμών (8 Μονάδες)

$$y_{n+1} - y_n - y_{n-1} = 0, \quad y_0 = 1, \quad y_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

2. Θεωρούμε την ακολουθία $\{I_n\}_{n=0}^{\infty}$ που ορίζεται από τη σχέση (8 Μονάδες)

$$I_n = \int_0^1 x^{2n} e^{-x^2} dx.$$

- (i) Να δειχθεί ότι η ανωτέρω ακολουθία είναι φθίνουσα.
(ii) Να δειχθεί ότι η ανωτέρω ακολουθία ικανοποιεί εξίσωση διαφορών της μορφής

$$I_{n+1} + \alpha_n I_n = \beta \quad (1)$$

και να προσδιορισθούν τα α_n και β .

- (iii) Να μελετηθεί η ευστάθεια του προβλήματος υπολογισμού των I_n μέσω της (1) δεδομένου του $I_0 = 0.7468$.
(iv) Να προταθεί μέθοδος ακριβούς υπολογισμού των I_n .

3. Θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών (9 Μονάδες)

$$y' = 3x^2, \quad y(0) = 0, \quad x \in [0, 1].$$

Εφαρμόζουμε τις τρεις μονοδηματικές μεθόδους (Άμεση Euler, Έμμεση Euler, Μέθοδος του κανόνα του τραπεζίου) για την αριθμητική επίλυση του ανωτέρω προβλήματος.

- (i) Από την εφαρμογή των τριών μεθόδων προκύπτουν τρία προβλήματα αρχικών τιμών για εξισώσεις διαφορών. Να υπολογισθούν οι λύσεις των προβλημάτων αυτών.
(ii) Να υπολογισθούν τα σφάλματα των μεθόδων αυτών στο σημείο $x_n = nh$ του διαστήματος $[0, 1]$.
(iii) Να υπολογισθούν τα τοπικά σφάλματα αποκοπής των τριών μεθόδων.