



Πανεπιστήμιο Κύπρου  
Τμήμα Μαθηματικών  
και Στατιστικής

**ΜΑΣ 471 - ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΣΥΝΗΘΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ**

ΔΕΥΤΕΡΗ ΕΝΔΙΑΜΕΣΗ ΕΞΕΤΑΣΗ

4 Απριλίου 2016

Εαρινό Εξάμηνο 2015-16

ΟΝΟΜΑ :

Άσκηση	1	2	3	Βαθμός
Μονάδες				

1. Θεωρούμε τη μέθοδο Runge-Kutta

(Μονάδες 10)

$$\begin{aligned}k_1 &= hf(x_n, Y_n) \\k_2 &= hf(x_n + \alpha h, Y_n + \beta k_1) \\Y_{n+1} &= Y_n + A_1 k_1 + A_2 k_2.\end{aligned}$$

για την επίλυση του προβλήματος αρχικών τιμών  $y' = f(x, y)$ ,  $y(a) = y_0$ .

- (i) Να βρεθούν οι σχέσεις μεταξύ των  $\alpha, \beta, A_1$  και  $A_2$  ούτως ώστε το τοπικό σφάλμα αποκοπής της μεθόδου να ελαχιστοποιείται. Ποία είναι η βέλτιστη τάξη της μεθόδου;
- (ii) Στην περίπτωση που  $A_2 = 1$ :
  - (α') Να διερευνηθεί η ευστάθεια της ανωτέρω μεθόδου σε σχέση με την εξίσωση  $y' = \lambda y$ ,  $\lambda < 0$ .
  - (β') Βρίσκοντας φράγμα για το ολικό σφάλμα να διερευνηθεί η σύγκλιση της ανωτέρω μεθόδου.
  - (γ') Θεωρούμε την ανωτέρω μέθοδο για την επίλυση του προβλήματος αρχικών τιμών  $y' = x^2$ ,  $y(0) = 0$ . Εξετάζοντας το αντίστοιχο πρόβλημα αρχικών τιμών για εξισώσεις διαφορών, να βρεθεί το σφάλμα στα σημεία του πλέγματος  $x_n = nh$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

2. Να κατασκευασθεί η ακριβέστερη άμεση τριβηματική μέθοδος.

(Μονάδες 8)

- (i) Ποιό είναι το τοπικό σφάλμα αποκοπής;
- (ii) Να εξετασθεί κατά πόσον η μέθοδος είναι μηδέν ευσταθής.

3. Να κατασκευασθεί η διβηματική μέθοδος BDF και να βρεθεί η τάξη της. (Μονάδες 7)

Να εξετασθεί κατά πόσον η μέθοδος είναι συνεπής και μηδέν ευσταθής. Επίσης να διερευνηθεί η ευστάθειά της σε σχέση με την εξίσωση  $y' = \lambda y$ ,  $\lambda < 0$ .