

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 1

1.1 Μια σκάλα AB μήκους a ακουμπά πάνω σε έναν κατακόρυφο τοίχο OA. Η βάση B της σκάλας απομακρύνεται με σταθερή ταχύτητα u_0 .

(α) Να δειχτεί ότι το μέσο της σκάλας διαγράφει τόξο κύκλου ακτίνας $a/2$ με κέντρο το O.

(β) Να βρεθεί η ταχύτητα και το μέτρο της ταχύτητας του μέσου της σκάλας τη χρονική στιγμή που το B βρίσκεται σε απόσταση b ($< a$) από τον τοίχο.

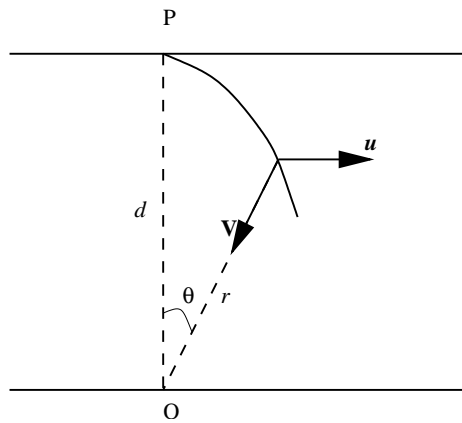
1.2 Ένα σωματίδιο κινείται πάνω σε περιφέρεια κύκλου ακτίνας R με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω_0 . Τη χρονική στιγμή $t = 0$ αρχίζει να επιβραδύνεται με γωνιακή επιτάχυνση $-\alpha$. Να δειχτεί ότι

(α) το σωματίδιο θα ηρεμήσει μετά από χρόνο ω_0/α

(β) το τόξο που θα διανυθεί είναι ίσο με $R\omega_0^2/2\alpha$.

1.3 Μια βάρκα ξεκινά από το σημείο P (βλέπε σχήμα) στη μια πλευρά του ποταμού και κινείται με ταχύτητα V σταθερού μέτρου και με κατεύθυνση πάντα προς το σημείο Q στην άλλη πλευρά του ποταμού, ακριβώς απέναντι από το P και σε απόσταση d από αυτό. Αν r είναι η στιγμιαία απόσταση της βάρκας από το Q , θ η γωνία μεταξύ του r και της PQ και ο ποταμός ρέει με ταχύτητα u , να δειχτεί ότι η τροχιά της βάρκας δίνεται από τη σχέση

$$r = \frac{d \sec \theta}{(\sec \theta + \tan \theta)^{V/u}}.$$



Σχήμα 1:

1.4 Να δειχτεί ότι σε κυλινδρικές συντεταγμένες (ρ, ϕ, z) το διάνυσμα θέσης είναι

$$\mathbf{r} = \rho \cos \phi \mathbf{i} + \rho \sin \phi \mathbf{j} + z \mathbf{k}.$$

Στη συνέχεια να εκφραστεί (α) η ταχύτητα και (β) η επιτάχυνση σε κυλινδρικές συντεταγμένες.

1.5 Ένα σωματίδιο μάζας m κινείται πάνω στον άξονα των x κάτω από την επίδραση μιας δύναμης έλξης που κατευθύνεται προς την αρχή O και δίνεται από την $\mathbf{F} = -(k/x^3)\mathbf{i}$. Αν το σωματίδιο ξεκινά από ηρεμία από το σημείο $x = a$, να βρεθεί ο χρόνος που χρειάζεται να φθάσει στο O .

1.6 Ένα σωματίδιο μάζας m κινείται σε ένα πεδίο δυνάμεων $\mathbf{F} = -kx\mathbf{i}$.

(α) Πόσο έργο παράγεται κατά την κίνηση του σωματιδίου από τη θέση $x = x_1$ στην θέση $x = x_2$.

(β) Αν ένα σωματίδιο με μάζα ίση με την μονάδα ξεκινήσει από το $x = x_1$ με ταχύτητα u_1 , με ποια ταχύτητα θα φθάσει στο σημείο $x = x_2$.

1.7 Ένα σωματίδιο ρίχνεται κατακόρυφα προς τα πάνω με αρχική ταχύτητα $u \text{ ms}^{-1}$. Πάνω στο σώμα ασκείται αντίσταση που είναι ανάλογη της στιγμιαίας ορμής του σωματιδίου, όπου k η σταθερά αναλογίας. Αν Z είναι το μέγιστο ύψος που φθάνει το σωματίδιο από το σημείο βολής και T είναι ο χρόνος που χρειάστηκε, ναδειχτεί ότι

$$u = kZ + gT.$$

Αν $k = \frac{1}{4}$ και $u = 200 \text{ ms}^{-1}$, να βρεθούν: (α) ο χρόνος T και (β) το ύψος Z . ($g = 10 \text{ ms}^{-2}$)

1.8 Ένα σωματίδιο ρίχνεται κατακόρυφα προς τα πάνω με αρχική ταχύτητα $U \text{ ms}^{-1}$. Πάνω στο σώμα ασκείται αντίσταση που είναι ίση με mkv^2 , όπου v είναι η στιγμιαία ταχύτητα του σωματιδίου και k είναι σταθερά. Το σωματίδιο φθάνει σε ηρεμία μετά από απόσταση h . Ναδειχτεί ότι το σωματίδιο επιστρέφει στο σημείο βολής με ταχύτητα

$$v = U \left(1 + \frac{kU^2}{g} \right)^{-\frac{1}{2}}.$$

1.9 Ένα σωματίδιο εκτοξεύεται με αρχική ταχύτητα 40 ms^{-1} και με γωνία 30° με ένα κεκλιμένο επίπεδο που σχηματίζει γωνία 30° με το οριζόντιο επίπεδο. Να υπολογιστούν:

(α) το διάνυσμα θέσης σε κάθε χρονική στιγμή

(β) ο χρόνος που χρειάζεται για να επιστρέψει στο έδαφος

(γ) το βεληνεκές (απόσταση από το σημείο βολής μέχρι το σημείο επιστροφής στο έδαφος)

(δ) η γωνία που σχηματίζει η τροχιά του σωματιδίου στο σημείον επιστροφής με το επίπεδο.

1.10 Ένα βλήμα εκτοξεύεται σε γωνία α από ένα βράχο ύψους h πάνω από το επίπεδο της θάλασσας. Αν αυτό πέσει στη θάλασσα σε απόσταση d από τη βάση του βράχου, ναδειχτεί ότι το μέγιστο ύψος πάνω από το επίπεδο της θάλασσας είναι ίσο με

$$h + \frac{d^2 \tan^2 \alpha}{4(h + d \tan \alpha)}.$$

1.11 Ένα αντικείμενο βάρους W εκτοξεύεται κατακόρυφα προς τα πάνω με ταχύτητα v_0 . Η αντίσταση του αέρα είναι ανάλογη προς τη στιγμιαία ταχύτητα και η σταθερά αναλογίας είναι k . Ναδειχτεί ότι το αντικείμενο θα φθάσει σε μέγιστο ύψος

$$\frac{Wv_0}{kg} - \frac{W^2}{k^2g} \ln \left(1 + \frac{kv_0}{W} \right).$$

Επίσης ναδειχτεί ότι ο χρόνος που χρειάζεται να φθάσει στο μέγιστο ύψος είναι

$$\frac{W}{kg} \ln \left(1 + \frac{kv_0}{W} \right).$$

1.12 Ένα σωματίδιο μάζας m εκτοξεύεται με αρχική ταχύτητα v_0 και με γωνία α με το οριζόντιο επίπεδο. Πάνω στο σωματίδιο ασκείται μια δύναμη που οφείλεται στην αντίσταση του αέρα και ισούται με $-\beta v$, όπου β είναι θετική σταθερά και v είναι η στιγμιαία ταχύτητα. Να βρεθούν:

(α) η ταχύτητα και (β) το διάνυσμα θέσης για κάθε χρονική στιγμή.

Επίσης ναδειχτεί ότι :

(γ) ο χρόνος που χρειάζεται να φθάσει στο ψηλότερο σημείο είναι

$$\frac{m}{\beta} \ln \left(1 + \frac{\beta v_0 \sin \alpha}{mg} \right),$$

(δ) το μέγιστο ύψος είναι

$$\frac{mv_0 \sin \alpha}{\beta} - \frac{m^2g}{\beta^2} \ln \left(1 + \frac{\beta v_0 \sin \alpha}{mg} \right).$$

1.13 Στο σχήμα τα AB και ΑΓ είναι σχοινιά που δένονται στην οροφή ΓΔ και στον τοίχο ΒΔ στα σημεία Γ και Β αντίστοιχα. Ένα βάρος W κρέμεται από το Α. Αν τα σχοινιά AB και ΑΓ σχηματίζουν γωνίες θ_1 και θ_2 με τον τοίχον και την οροφή αντίστοιχα, να υπολογιστούν οι τάσεις T_1 και T_2 των σχοινιών.

1.14 (i) Μια μάζα 400 kg βρίσκεται πάνω σε ένα κεκλιμένο επίπεδο με γωνία 30° . Πάνω στη μάζα ασκείται μια δύναμη 4800 N με γωνία 300° ως προς το επίπεδο. Να βρεθεί η επιτάχυνση της μάζας, αν το κεκλιμένο επίπεδο (α) δεν έχει τριβή και (β) έχει συντελεστή τριβής 0.2.

(ii) Να λυθεί το (i), αν η δύναμη ασκείται όπως φαίνεται στο σχήμα.

1.15 Να βρεθεί το μέτρο της δύναμης F που χρειάζεται για να κρατήσει σωματίδιο μάζας m σε ισορροπία πάνω σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας α αν (α) το επίπεδο είναι λείο, (β) το επίπεδο έχει συντελεστή τριβής μ .

1.16 Ένα σωματίδιο κινείται με αρχική ταχύτητα u προς τα πάνω σ'ένα κεκλιμένο επίπεδο γωνίας α και συντελεστή τριβής $\mu = \tan \lambda$, όπου $\lambda < \alpha$. Να δειχτεί ότι το σωματίδιο θα έχει ξανά ταχύτητα u όταν θα είναι σε απόσταση

$$\frac{u^2}{g} \frac{\cos \alpha \sin 2\lambda}{\cos 2\lambda - \cos 2\alpha}$$

κάτω από το σημείο εκκίνησης.

1.17 Στο σχήμα το AB είναι ένα λείο τραπέζι και οι μάζες m_1 και m_2 συνδέονται με ένα σπάγγο που περνά από ένα λείο καρφί στο B. Να βρεθούν:(α) η επιτάχυνση της μάζας m_2 και (β) η τάση του σπάγγου.

1.18 Οι μάζες m_1 και m_2 είναι πάνω σε κεκλιμένα επίπεδα γωνιών α_1 και α_2 αντίστοιχα και συνδέονται με ένα σπάγκο σταθερού μήκους και αμελητέας μάζας, που περνά από ένα λείο καρφί. Να βρεθούν οι επιταχύνσεις των μαζών αν (α) τα επίπεδα είναι λεία και (β) αν ο συντελεστής τριβής μεταξύ των μαζών και των επιπέδων είναι ίσος με μ .

1.19 Ένα κατακόρυφο ελατήριο με σταθερή κ και φυσικό μήκος 1.2 m στερεώνεται με το πάνω άκρο του σε ένα σταθερό σημείο A. Ένα σωματίδιο μάζας 1 kg τοποθετείται στο κάτω άκρο του ελατηρίου, το οποίον ισορροπεί σε απόσταση 1.4 μ από το A. Ύστερα ανυψώνεται σε ύψος 0.4 m κάτω από το A και αφήνεται να πέσει. Να δειχτεί ότι το σωματίδιο κινείται σε απλή αρμονική κίνηση με περίοδο $\frac{2\pi}{7}$.

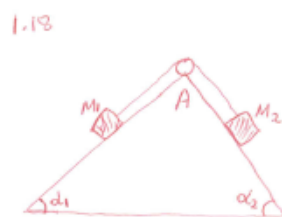
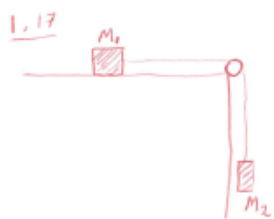
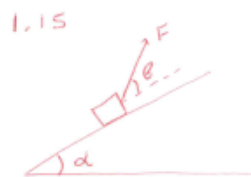
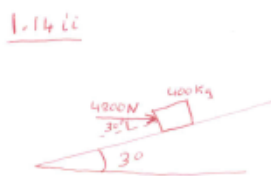
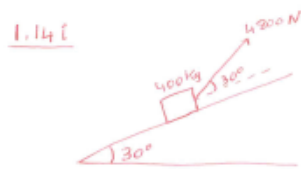
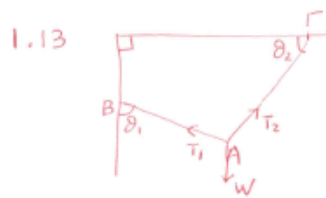
1.20 Ένας ελαστικός σπάγκος με φυσικό μήκος l και ελαστική σταθερά $4mg/l$, έχει το ένα άκρο του στερεωμένο στο σταθερό σημείο A και στο άλλο άκρο έχει ένα σωματίδιο μάζας m που βρίσκεται σε ισορροπία κατακόρυφα κάτω από το A. Το σωματίδιο μετακινείται σε απόσταση h προς τα κάτω από το σημείο ισορροπίας και αφήνεται ελεύθερο. Αν το σωματίδιο μόλις φθάνει το σημείο A, να βρεθεί η απόσταση h .

1.21 Ένα σωματίδιο μάζας m κρέμεται από κατακόρυφο ελατήριο το οποίο έχει το άνω άκρο στερεωμένο. Αν το ελατήριο έχει φυσικό μέγεθος α και σταθερά κ να βρεθεί η εξίσωση κίνησης του σωματιδίου και να προσδιοριστεί το σημείο ισορροπίας. Αν το ελατήριο επιμηκυνθεί σε μήκος $\alpha/4$ προς τα κάτω από το σημείο ισορροπίας και αφεθεί ελεύθερο, να βρεθεί η θέση του σωματιδίου σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή. Επίσης να βρεθεί η μέγιστη ταχύτητα του σωματιδίου και η περίοδος της κίνησης.

1.22 Ένα σωματίδιο μάζας 1.5 kg που κρέμεται από ένα κατακόρυφο ελατήριο το επιμηκύνει κατά 0.4 m. Το σωματίδιο ωθείται προς τα κάτω κατά 1 m και αφήνεται ελεύθερο. Να βρεθεί η θέση του σωματιδίου για τυχόν χρόνο, αν η δύναμη απόσβεσης είναι ίση με

(α) 15 φορές τη στιγμιαία ταχύτητα και

(β) 18.75 φορές τη στιγμιαία ταχύτητα.



Σχήμα 2: