

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 2

2.1 Ένα σωματίδιο εκτοξεύεται κατακόρυφα προς τα πάνω από την επιφάνεια της Γης με αρχική ταχύτητα v_0 .

(α) Να δειχθεί ότι το μέγιστο ύψος H που φθάνει πάνω από την επιφάνεια της Γης είναι ίσο με

$$H = \frac{v_0^2 R}{2gR - v_0^2},$$

όπου R είναι η ακτίνα της Γης.

(β) Τι συμβαίνει στην περίπτωση όπου $v_0^2 = 2gR$.

(γ) Να δειχθεί ότι, αν το H είναι μικρό, τότε αυτό ισούται περίπου με $\frac{v_0^2}{2g}$.

(δ) Να δειχθεί ότι ο χρόνος που χρειάζεται το σωματίδιο για να φθάσει στο μέγιστο ύψος είναι ίσος με

$$\sqrt{\frac{R+H}{2g}} \left[\sqrt{\frac{H}{R}} + \frac{R+H}{2R} \cos^{-1} \left(\frac{R-H}{R+H} \right) \right].$$

(ε) Να δειχθεί ότι, αν το H είναι πολύ μικρό σε σύγκριση με το R , τότε ο χρόνος του μέρους

(δ) είναι περίπου ίσος με $\sqrt{\frac{2H}{g}}$.

2.2 Ένα σωματίδιο κινείται κάτω από την επίδραση μιας κεντρικής δύναμης σε τροχιά με εξίσωση $r = c \tanh\left(\frac{\theta}{\sqrt{2}}\right)$. Αν εκτοξεύεται από την αρχή των αξόνων με στροφορμή ίση με h ανά μονάδα μάζας, να δειχθεί ότι το μέτρο της δύναμης είναι ανάλογο του $\frac{1}{r^5}$ και ότι ο χρόνος που χρειάστηκε να κινηθεί από το σημείο $\theta = 0$ στο σημείο $\theta = \alpha\sqrt{2}$ πάνω στην τροχιά είναι ίσος με

$$\frac{\sqrt{2}c^2(\alpha - \tanh \alpha)}{h}.$$

2.3 Ένα σωματίδιο P μάζας m που κινείται κάτω από της επίδραση της κεντρικής δύναμης

$$\frac{mk}{r^3} \left(3 + \frac{2c^2}{r^2} \right)$$

η οποία έχει κατεύθυνση προς ένα σταθερό σημείο O , με $OR = r$ και k και c είναι σταθερές. Το σωματίδιο εκτοξεύεται από το σημείο A , όπου $OA = c$, με ταχύτητα $\frac{\sqrt{5}k}{c}$ που σχηματίζει γωνία α με την AO , όπου $\tan \alpha = \frac{1}{2}$. Να δειχθεί ότι η διαφορική εξίσωση της τροχιάς μπορεί να γραφεί στην μορφή:

$$p \frac{dp}{du} = 2u(1 + c^2 u^2),$$

όπου $u = \frac{1}{r}$ και $p = \frac{du}{d\theta}$, με θ η πολική γωνία του P ως προς την αρχική γραμμή OA. Να δειχθεί ότι το σωματίδιο ακολουθεί την τροχιά

$$r = c \cot\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right).$$

2.4 Ένα σωματίδιο P μάζας m κινείται κάτω από την επίδραση μιας κεντρικής δύναμης $\frac{\lambda}{r^3}$ ανά μονάδα μάζας που έχει κατεύθυνση προς ένα σταθερό σημείο O, όπου λ είναι σταθερά και r είναι η απόσταση OP. Αν το P εκτοξεύεται με ταχύτητα $\frac{5\sqrt{\lambda}}{4c}$ που σχηματίζει ορθή γωνία με την OP όταν η OP είναι ίση με c , να δειχθεί ότι όταν το P τείνει στο άπειρον η διανυσματική ακτίνα θα περιστραφεί κατά μια γωνία ίση με $\frac{5\pi}{6}$.

2.5 Ένα σωματίδιο P μάζας m κινείται κάτω από την επίδραση μιας δύναμης $\frac{\mu}{r^2}$ ανά μονάδα μάζας με κατεύθυνση προς ένα σημείο O, όπου $OP = r$. Αν το P εκτοξεύεται από το σημείο A με ταχύτητα $\sqrt{\frac{\mu}{c}}$ που σχηματίζει ορθή γωνία με την OA, όπου μ και c είναι θετικές σταθερές και $OA = \frac{4c}{3}$, να δειχθεί ότι η τροχιά είναι έλλειψη με εκκεντρότητα ίση με $\frac{1}{3}$. Επίσης να δειχθεί ότι η περίοδος της κίνησης είναι $4\pi\sqrt{\frac{2c^3}{\mu}}$.

2.6 Ένα σωματίδιο κινείται κάτω από την επίδραση μιας δύναμης n^2r ανά μονάδα μάζας με κατεύθυνση προς ένα σταθερό σημείο O. Αρχικά εκτοξεύεται από σημείο A που βρίσκεται σε απόσταση c από το O με ταχύτητα nc που σχηματίζει ορθή γωνία με την OA. Να δειχθεί ότι η τροχιά είναι υπερβολή.

2.7 Ένα σωματίδιο P κινείται κάτω από την επίδραση μιας δύναμης $\frac{\lambda}{r^3}$ ανά μονάδα μάζας με κατεύθυνση προς το σταθερό σημείο O. Το σωματίδιο εκτοξεύεται από σημείο A που βρίσκεται σε απόσταση c από το O με ταχύτητα v που σχηματίζει ορθή γωνία με την OA.

(α) Να δειχθεί ότι η κίνηση είναι κυκλική αν $\lambda = c^2v^2$.

(β) Αν $\lambda > c^2v^2$ να δειχθεί ότι $u = \frac{1}{r} = \frac{1}{c} \cosh \omega\theta$, όπου το ω πρέπει να υπολογιστεί, και ότι το σωματίδιο φτάνει στο O σε χρόνο ίσο με

$$\frac{c^2}{\sqrt{\lambda - c^2v^2}}.$$

(γ) Αν $\lambda < c^2v^2$ να δειχθεί ότι το r αυξάνεται απεριόριστα.

2.8 Ένα σωματίδιο έλκεται προς το σημείο O από τη δύναμη

$$F(r) = k \left[4 \left(\frac{a}{r}\right)^2 - 3 \left(\frac{a}{r}\right)^3 \right]$$

ανά μονάδα μάζας, όπου k είναι σταθερά. Το σωματίδιο εκτοξεύεται από το σημείο A που βρίσκεται σε απόσταση a από το O με ταχύτητα που έχει συνιστώσα \sqrt{ak} κατά μήκος της OA και ίση συνιστώσα κάθετη στην OA. Να δειχθεί ότι η μέγιστη και ελάχιστη απόσταση του σωματιδίου από το O είναι $2a$ και $\frac{2}{3}a$ αντίστοιχα. Να βρεθεί η γωνία που διαγράφει η διανυσματική ακτίνα μεταξύ του πρώτου μεγίστου και του επόμενου ελαχίστου.