

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 4

4.1 Μια ομαλή σφαίρα μάζας m_1 συγκρούεται πλάγια με σφαίρα μάζας m_2 η οποία βρισκόταν σε ηρεμία. Αμφότερες οι σφαίρες είναι του ίδιου μεγέθους και η αρχική διεύθυνση της κίνησης της μάζας m_1 σχηματίζει γωνία α με την κοινή κάθετη των δύο σφαιρών. Δίνεται ότι $m_2 e > m_1$ και ότι μετά την κρούση η μάζα m_1 κινείται σε διεύθυνση που σχηματίζει ορθή γωνία με την αρχική διεύθυνση. Ναδειχτεί ότι

$$\tan \alpha = \sqrt{\frac{m_2 e - m_1}{m_1 + m_2}}$$

όπου e είναι ο συντελεστής κρούσης.

4.2 Τέσσερα σωματίδια ίσης μάζας είναι συνδεδεμένα με τεντωμένο σπάγγο και βρίσκονται στα σημεία A, B, Γ, Δ, όπου AB, ΒΓ και ΓΔ είναι πλευρές κανονικού εξαγώνου (AB=ΒΓ=ΓΔ). Στο σωματίδιο A δίνεται μια ώθηση που το αναγκάζει να κινηθεί προς τη κατεύθυνση ΒΑ με ταχύτητα u . Ναδειχτεί ότι το σωματίδιο στο Δ θα αρχίσει να κινείται με ταχύτητα $u/13$.

4.3 Τα σωματίδια m_1, m_2 κινούνται με ταχύτητες u_1, u_2 αντίστοιχα ($u_1 > u_2$) και συγκρούονται. Ναδειχτεί ότι:

(α) Η ώθηση μεταξύ τους είναι ίση με

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (u_1 - u_2) (1 + e)$$

όπου e είναι ο συντελεστής κρούσης.

(β) Αν $m_1 = m_2$ και $e = 1$ τα σωματίδια αλλάζουν ταχύτητες.

(γ) Η χαμένη κινητική ενέργεια του συστήματος είναι ίση με

$$\frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (u_1 - u_2)^2 (1 - e^2).$$

4.4 Τα σωματίδια A, B, Γ με μάζες m_1, m_2, m_3 αντίστοιχα, βρίσκονται πάνω σε ομαλό τραπέζι και συνδέονται με τεντωμένο σπάγγο. Η γωνία ABΓ είναι ίση με $\pi - \alpha$, όπου $\alpha < \frac{\pi}{2}$. Αν δοθεί στο Γ μια ώθηση J κατά μήκος της ΒΓ, ναδειχτεί ότι το Β αρχίζει να κινείται σε μια κατεύθυνση που σχηματίζει με την AB γωνία θ , όπου

$$\tan \theta = \left(1 + \frac{m_1}{m_2} \right) \tan \alpha.$$

Επίσης να βρεθεί η αρχική ταχύτητα του A.

4.5 Μια ομαλή σφαίρα αφήνεται να πέσει από ύψος h και κτυπά σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας α . Αν ο συντελεστής κρούσης μεταξύ σφαίρας και επιπέδου είναι ίσος με $\frac{1}{2}$, να αποδειχτεί ότι η απόσταση μεταξύ πρώτου και τέταρτου σημείου κρούσης είναι ίση με

$$\frac{105}{16} h \sin \alpha$$

και να βρεθούν οι ωθήσεις από το επίπεδο σε αυτές τις κρούσεις.

4.6 Η μόνη δύναμη που ασκείται πάνω σε δύο σωματίδια P_1 και P_2 της ίδιας μάζας m , είναι η έλξη μεταξύ τους η οποία έχει μέτρο ίσο με μmr^{-2} , όπου r είναι η απόσταση μεταξύ των δύο σωματιδίων. Αρχικά τα σωματίδια βρίσκονται σε απόσταση $2a$ και κινούνται με ταχύτητες

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu}{a}}(\sqrt{3}\mathbf{i} + \mathbf{j}) \quad \text{και} \quad \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3\mu}{a}}(-\mathbf{i} + \sqrt{3}\mathbf{j})$$

αντίστοιχα, όπου \mathbf{i} το μοναδιαίο διάνυσμα κατά μήκος της P_1P_2 και \mathbf{j} το μοναδιαίο διάνυσμα που είναι κάθετο στο \mathbf{i} . Ναδειχτεί ότι το κέντρο μάζας των σωματιδίων O' , κινείται με ταχύτητα $\sqrt{\frac{\mu}{a}}\mathbf{j}$ κατά την διάρκεια της κίνησης. Επίσης να βρεθεί η πολική εξίσωση της τροχιάς ως προς το O' για ένα από τα σωματίδια.

[Υπόδειξη: Μπορεί να χρησιμοποιηθεί η εξίσωση $\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{F(u^{-1})}{mh^2u^2}$.]