

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ 5

**5.1** Να βρεθεί η ακτίνα περιφοράς ενός κυκλικού στερεού κώνου που έχει ύψος  $h$  και ακτίνα βάσης  $a$ , γύρω από

(i) τον άξονα του κώνου

(ii) μια διάμετρο της βάσης

Να δειχτεί ότι αυτές οι ακτίνες περιφοράς είναι ίσες αν ισχύει  $2h^2 = 3a^2$ .

**5.2** Η ακτίνα περιφοράς μιας ομοιόμορφης τριγωνικής πλάκας PQR από ένα άξονα που περνά από το P και παράλληλα από τη QR είναι ίση με  $k$ .

Να δειχτεί ότι  $k^2 = \frac{1}{2}h^2$ , όπου  $h$  είναι η κάθετη απόσταση του P από την QR. Να βρεθεί η ακτίνα περιφοράς γύρω από την QR.

Χρησιμοποιώντας τα πιο πάνω αποτελέσματα, ή διαφορετικά, να δειχθεί ότι η ακτίνα περιφοράς μιας ομοιόμορφης κανονικής εξαγωνικής πλάκας ABCDEF με πλευρά ίση με  $2a$  γύρω από την AD είναι ίση με  $\sqrt{\frac{5}{6}}a$ . Αν η εξαγωνική πλάκα έχει μάζα  $M$ , να βρεθεί η ροπή αδράνειας της πλάκας γύρω από μια πλευρά.

**5.3** Μια ομοιόμορφη συμπαγής σφαίρα κυλά στο εσωτερικό μιας σταθερής κοίλης σφαίρας, όπου τα κέντρα των δύο σφαιρών βρίσκονται στο ίδιο κατακόρυφο επίπεδο. Να δειχθεί ότι η μικρή σφαίρα θα κάνει ολόκληρη περιστροφή αν, όταν βρίσκεται στο χαμηλότερο σημείο, η αντίσταση πάνω της από την μεγάλη σφαίρα είναι  $\frac{34}{7}$  φορές μεγαλύτερη από το βάρος της.

**5.4** Μια συμπαγής σφαίρα ακτίνας  $a$  κυλά σε οριζόντιο επίπεδο με γραμμική ταχύτητα  $v$  με κατεύθυνση προς ένα σταθερό μη ελαστικό σκαλοπάτι με ύψος  $\frac{a}{5}$ . Να δειχτεί ότι η σφαίρα ανεβαίνει το σκαλοπάτι (έχοντας πάντοτε επαφή με το τραπέζι ή/και το σκαλοπάτι) αν ισχύει

$$\frac{7}{18}ag < v^2 < \frac{49}{45}ag.$$

**5.5** Ένας ομοιόμορφος στερεός κύλινδρος μάζας  $2m$  και ακτίνας  $a$  κυλά χωρίς να ολισθαίνει προς τα κάτω σε ένα κεκλιμένο επίπεδο γωνίας  $\frac{\pi}{6}$ . Να βρεθεί η γωνιακή επιτάχυνση και η ελάχιστη τιμή του συντελεστή τριβής μεταξύ επιπέδου και κυλίνδρου.

**5.6** Μια σφαίρα βρίσκεται στην κορυφή μιας σταθερής σφαίρας. Η πρώτη σφαίρα μετατοπίζεται ελαφρά ώστε να κυλά χωρίς να ολισθαίνει προς τα κάτω πάνω στη δεύτερη σφαίρα. Να δειχτεί ότι η πρώτη σφαίρα θα εγκαταλείψει τη δεύτερη σφαίρα όταν  $\cos \theta = \frac{10}{17}$ , όπου  $\theta$  είναι η γωνία που σχηματίζει η ευθεία που ενώνει τα κέντρα τους με την κατακόρυφη.

**5.7** Μια ομοιόμορφη ράβδος, μήκους  $2a$  και βάρους  $W$ , βρίσκεται σε ισορροπία με το πάνω άκρο B να ακουμπά σε κατακόρυφο τοίχο και το άκρο A συνδέεται με σπάγκο με το σημείο C που βρίσκεται κατακόρυφα πάνω από το B.

(i) Αν σε ισορροπία η  $AB$  σχηματίζει γωνία  $\frac{\pi}{3}$  με την κατακόρυφη, να υπολογιστεί το μήκος του σπάγκου.

(ii) Όταν ένα σωματίδιο βάρους  $nW$  συνδέεται στο άκρο  $B$  της ράβδου, τότε η ράβδος ισορροπεί όταν σχηματίζει γωνία  $\frac{\pi}{6}$  με την κατακόρυφη. Να αποδειχθεί ότι  $n = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

**5.8** Δύο σταθερά επίπεδα, το ένα κατακόρυφο και το άλλο κεκλιμένο που σχηματίζουν γωνία  $\phi$  μεταξύ τους, τέμνονται σε μια οριζόντια γραμμή. Μια ράβδος  $AB$  έχει το άκρο  $A$  πάνω στο κατακόρυφο επίπεδο και το  $B$  πάνω στο κεκλιμένο με την  $AB$  κάθετη στο κεκλιμένο επίπεδο. Αν το κατακόρυφο επίπεδο δεν έχει τριβή και το κεκλιμένο επίπεδο έχει συντελεστή τριβής  $\mu$ , να δειχθεί ότι όταν η ράβδος είναι έτοιμη να ολισθήσει τότε

$$\mu = \frac{\tan \phi}{2 \tan^2 \phi + 1}.$$

**5.9** Ένα στερεό σώμα είναι ελεύθερο να περιστρέφεται γύρω από το κέντρο μάζας  $C$ . Οι κύριες ροπές αδράνειας είναι 7, 25, 32 μονάδες αντίστοιχα. Στο σώμα δίνεται μια γωνιακή ταχύτητα  $\Omega$  γύρω από ευθεία που διέρχεται από το  $C$  με λόγο 4:0:3. Να δειχθεί ότι μετά από χρόνο  $t$  οι συνιστώσες της γωνιακής ταχύτητας γύρω από τους κύριους άξονες αδράνειας στο  $C$  είναι ίσες με:

$$\frac{4}{5}\Omega \cos \phi, \quad \frac{4}{5}\Omega \sin \phi, \quad \frac{3}{5}\Omega \cos \phi,$$

αντίστοιχα, όπου  $\tan \frac{\phi}{2} = \tanh \left( \frac{3}{10}\Omega t \right)$ .

Να βρεθεί η γωνιακή ταχύτητα όταν  $t \rightarrow \infty$ .

**5.10** Μια ομοιόμορφη ορθογώνια πλάκα είναι ελεύθερη να περιστρέφεται γύρω από το κέντρο της  $O$ . Η πλάκα  $ABCD$  είναι τέτοια ώστε  $BC = \sqrt{2}AB$ . Αρχικά περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα  $\Omega$  γύρω από ευθεία διερχόμενη από το  $O$  κάθετα στην  $AB$  και σχηματίζει γωνία  $\frac{\pi}{6}$  με το επίπεδο της πλάκας. Να βρεθούν οι συνιστώσες της γωνιακής ταχύτητας γύρω από τους κύριους άξονες στο  $O$  μετά από χρόνο  $t$ .

**5.11** Μια ομοιόμορφη σφαίρα κυλά χωρίς ολίσθηση πάνω σε μη ομαλό οριζόντιο επίπεδο το οποίο περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα  $\Omega$  γύρω από κατακόρυφο άξονα. Αν δεν υπάρχουν δυνάμεις που ασκούνται στη σφαίρα, εκτός από το βάρος της και τη δύναμη της τριβής, να αποδειχθεί ότι ο γεωμετρικός τόπος του κέντρου της σφαίρας είναι ένας κύκλος.