ΑΣΚΗΣΕΙΣ 6

6.1 Ένας σπάγκος OAB είναι συνδεδεμένος σε σταθερό σημείο στο O, στο A υπάρχει μια μάζα $2m$ και στο B υπάρχει μια μάζα m. Τα μήκη OA και AB είναι a και b αντίστοιχα. Το σύστημα είναι ελεύθερο να κινείται σε κατακόρυφο επίπεδο και να εκτελεί μικρές ταλαντώσεις γύρω από την θέση ισορροπίας. Οι κλίσεις των OA και AB με την κατακόρυφο είναι θ και ϕ αντίστοιχα. Να αποδειχτούν οι εξισώσεις κίνησης:

$$\ddot{\theta} + \frac{1}{3}\lambda\ddot{\phi} + n^2\theta = 0 \quad kai \quad \ddot{\theta} + \lambda\ddot{\phi} + n^2\phi = 0,$$

όπου $\lambda = b/a$ και $n^2 = g/a$.

6.2 Ένα κυκλικό στεφάνι μάζας M και ακτίνας a έχει μια ομαλή ράβδο AB χωρίς βάρος και μήκος $2a$ στερεωμένη στα αντίθετα άκρα A και B μιας διαμέτρου. Ενα σωματίδιο P μάζας m κινείται ελεύθερα πάνω στη ράβδο και το σύστημα κυλά χωρίς ολίσθηση πάνω σε οριζόντιο τραπέζι με τέτοιο τρόπο ώστε να βρίσκεται σε κατακόρυφο επίπεδο. Να υπολογιστούν η κινητική και δυναμική ενέργεια του συστήματος χρησιμοποιώντας ως γενικευμένες συντεταγμένες την θ, που είναι η γωνία που σχηματίζεται από την AB και την οριζόντια και το x, που είναι η απόσταση του P από το κέντρο O. Το x είναι θετικό όταν βρίσκεται στο τμήμα OB της ράβδου.
Να βρεθούν οι εξισώσεις του Lagrange και να δειχτεί ότι αν το σύστημα αφήνεται να κινηθεί από ηρεμία όταν $\theta = 0$ και $x = b$ $(0 < b < a)$ τότε αρχικά,

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{abmg}{2Ma^2 + mb^2}.$$

6.3 Μια ομοιόμορφη ράβδος μάζας $3m$ και μήκους $2a$ είναι στερεωμένη στο κέντρο μάζας και έχει ένα σωματίδιο μάζας m προσαρτημένο στο ένα άκρο. Η ράβδος, όταν βρίσκεται σε οριζόντια θέση, τίθεται σε περιστροφή γύρω από κατακόρυφο άξονα διερχόμενον από το κέντρο μάζας με γωνιακή ταχύτητα $\sqrt{\frac{2ng}{a}}$. Να δειχτεί ότι το άκρο της ράβδου με το σωματίδιο θα πέφτει μέχρι που η κλίση της ράβδου με την κατακόρυφη είναι ίση με

$$\cos^{-1}\left(\sqrt{n^2+1} - n\right).$$

6.4 Το διάνυσμα θέσης κάθε σωματιδίου σε ένα συγκεκριμένο σύστημα είναι μια συνάρτηση της συντεταγμένης q και του χρόνου t. Να δειχτεί ότι η κινητική ενέργεια του συστήματος είναι ίση με

$$T = \alpha\dot{q}^2 + \beta\dot{q} + \gamma,$$

όπου, γενικά, $\alpha,\ \beta$ και γ είναι συναρτήσεις των q και t.
Αν το έργο που παράγεται από μικρή μεταβολή του q μπορεί να βρεθεί από το δυναμικό $V(q)$ και αν $V,\ \alpha,\ \beta$ και γ δεν εξαρτώνται άμεσα από τον χρόνο t, χρησιμοποιώντας την εξίσωση του Lagrange, να δειχτεί ότι

$$\alpha\dot{q}^2 - \gamma + V = \text{ σταθερό}$$

κατά την διάρκεια της κίνησης.

Μια χάντρα κινείται πάνω σε σύρμα που έχει σχήμα κύκλου ακτίνας a. Το κυκλικό σύρμα περιστρέφεται γύρω από κατακόρυφη διάμετρο με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω. Να βρεθεί η κινητική ενέργεια της χάντρας όταν η ακτίνα της χάντρας σχηματίζει γωνία θ με την κατακόρυφη. Να δειχτεί ότι, αν $\dot{\theta} = 0$ όταν $\theta = \frac{\pi}{2}$, τότε

$$\alpha\dot{\theta}^2 = \left(2g - \alpha\omega^2 \cos\theta\right) \cos\theta.$$

6.5 Μια ομοιόμορφη ράβδος μάζας m κινείται σε ένα επίπεδο. Η ταχύτητα κατά μήκος της ράβδου είναι w και οι κάθετες ταχύτητες στα άκρα είναι u και v αντίστοιχα. Να δειχτεί ότι η κινητική ενέργεια της ράβδου είναι

$$\frac{1}{6}m\left(u^2 + v^2 + 3w^2 + uv\right).$$

Δύο ομοιόμορφες ράβδοι ΑΒ (μάζας m, μήκους $2a$) και ΒΓ (μάζας $2m$, μήκους a) ενώνονται ομαλά στο Β και βρίσκονται σε ηρεμία πάνω σε οριζόντιο ομαλό τραπέζι. Η γωνία ΑΒΓ είναι ορθή. Μια οριζόντια ώθηση που σχηματίζει γωνία θ με την AC (C το κέντρο μάζας της ΑΒ) εφαρμόζεται στο C. Αν οι αρχικές γωνιακές ταχύτητες των ράβδων είναι ίσες και αντίθετες, να δειχτεί ότι

$$\tan\theta = \frac{3}{2}.$$