

ΕΞΕΤΑΣΗ 2 - 17/11/2018

1. Σωματιδίου P μάζας m κινείται κάτω από την επίδραση κεντρικής δύναμης $m f(r) \mathbf{r}_1$, όπου \mathbf{r}_1 είναι το μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση OP (O η αρχή των αξόνων). Να δειχθεί ότι το σωματίδιο κινείται σε επίπεδο και ότι η στροφορμή του είναι σταθερή. Στη συνέχεια να δειχθεί ότι η κίνηση του σωματιδίου περιγράφεται από τις εξισώσεις

$$r^2 \dot{\theta} = h \quad \text{και} \quad \ddot{r} - \frac{h^2}{r^3} = f(r),$$

όπου r και θ είναι οι πολικές συντεταγμένες του σωματιδίου P και h είναι στροφορμή του P ανά μονάδα μάζας.

Χρησιμοποιώντας τις πιο πάνω εξισώσεις, να δειχθεί ότι

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = -\frac{f\left(\frac{1}{u}\right)}{h^2 u^2}, \quad u = \frac{1}{r}.$$

2. Ένα σωματίδιο μάζας m κινείται σε κεντρικό πεδίο δυνάμεων μέτρου $\frac{\mu m}{r^3}$ και κατεύθυνση προς το σημείο O. Αρχικά το σωματίδιο εκτοξεύτηκε από το σημείο A που είναι σε απόσταση a από το O με ταχύτητα $\frac{\sqrt{\mu}}{a}$ και γωνία $\frac{\pi}{4}$ με την επέκταση της OA. Να βρεθεί η τροχιά της κίνησης.

3. Έστω ένα σύστημα συντεταγμένων S' που περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω γύρω από ένα σύστημα συντεταγμένων S , όπου S και S' έχουν κοινή αρχή. Να δοθεί η σχέση που συνδέει την απόλυτη παράγωγο και την σχετική παράγωγο. Να δειχθεί ότι ο δεύτερος νόμος του Newton, ως προς το περιστρεφόμενο σύστημα S' , γράφεται

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F} - 2m\omega \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} - m\omega \times (\omega \times \mathbf{r}).$$

Ένα σωματίδιο κινείται ελεύθερα κοντά στην επιφάνεια της Γης. Να δειχθεί ότι η εξίσωση κίνησης δίνεται κατά προσέγγιση από τον τύπο

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} + 2\omega \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{g},$$

όπου ω είναι η γωνιακή ταχύτητα της περιστροφής της Γης.

Αν το αρχικό διάνυσμα είναι \mathbf{r}_0 και η αρχική ταχύτητα \mathbf{v}_0 , να δειχθεί ότι το διάνυσμα θέσης σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή είναι

$$\mathbf{r} = \frac{1}{2} t^2 \mathbf{g} - \frac{1}{3} t^3 \omega \times \mathbf{g} - t^2 \omega \times \mathbf{v}_0 + t \mathbf{v}_0 + \mathbf{r}_0.$$

4. Ένα σύρμα AB μήκους a που είναι σε σχήμα ευθείας γραμμής περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω γύρω από σταθερό κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το άκρο A. Μια χάντρα, που μπορεί να κινηθεί πάνω στο σύρμα, εκτοξεύεται από το A με ταχύτητα u . Αν η τριβή είναι αμελητέα και το σύρμα περιστρέφεται σε οριζόντιο επίπεδο, να προσδιοριστεί η θέση της χάντρας σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή. Ναδειχθεί ότι ο χρόνος που χρειάστηκε μέχρι να φθάσει η χάντρα στο άκρο B είναι ίσος με

$$t = \frac{1}{\omega} \sinh^{-1} \left(\frac{\omega a}{u} \right).$$

Να βρεθεί η ταχύτητα της χάντρας όταν φτάσει στο άκρο B. Επίσης να βρεθεί η αντίσταση που ασκείται πάνω στην χάντρα όταν βρίσκεται στο B.

5. Ένα σύστημα αποτελείται από δύο σωματίδια με μάζα m_1 και m_2 , αντίστοιχα. Τα σωματίδια κινούνται κάτω από την επίδραση μόνο εσωτερικών δυνάμεων. Να αποδειχθεί ότι η κίνηση του συστήματος μπορεί να περιγραφεί και με ένα σωματίδιο μάζας

$$M = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}.$$

Να δειχθεί ότι το κέντρο μάζας του συστήματος μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως αρχή ενός αδρανειακού συστήματος αξόνων.

Επίσης να δειχθεί ότι η διαφορά της κινητικής ενέργειας ως προς το κέντρο μάζας και της κινητικής ενέργειας ως προς την αρχή των αξόνων είναι ίση με

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)\bar{v}^2,$$

όπου \bar{v} η ταχύτητα του κέντρου μάζας.

6. Σωματίδιο A που κινείται με ταχύτητα v και συγκρούεται πλάγια με σωματίδιο B της ίδιας μάζας το οποίο βρισκόταν σε ηρεμία. Μετά την κρούση το σωματίδιο B θα κινηθεί με ταχύτητα u με διεύθυνση που σχηματίζει γωνία 2θ ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) με την διεύθυνση της ταχύτητας v . Επίσης το σωματίδιο A θα κινηθεί με ταχύτητα w που σχηματίζει γωνία θ με την διεύθυνση της ταχύτητας v και γωνία 3θ με την διεύθυνση της ταχύτητας u . Να εκφραστεί το $\cos \theta$ συναρτήσει του συντελεστή κρούσης e .

$$[\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta \text{ και } \cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1]$$