

ΕΞΕΤΑΣΗ 2 - 7/4/2021

1. Ναδειχθεί ότι η κίνηση ενός σωματιδίου P μάζας m που κινείται κάτω από την επίδραση κεντρικής δύναμης $m f(r) \mathbf{r}_1$, όπου \mathbf{r}_1 είναι το μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση OP (O η αρχή των αξόνων), περιγράφεται από τις εξισώσεις

$$r^2 \dot{\theta} = h \quad \text{και} \quad \ddot{r} - \frac{h^2}{r^3} = f(r),$$

όπου r και θ είναι οι πολικές συντεταγμένες του σωματιδίου P και h είναι στροφορμή του P ανά μονάδα μάζας.

Χρησιμοποιώντας τις πιο πάνω εξισώσεις ναδειχθεί ότι

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = -\frac{f\left(\frac{1}{u}\right)}{h^2 u^2}, \quad u = \frac{1}{r}.$$

Ναδειχθεί ότι η δυναμική ενέργεια είναι ίση με $V(r) = -\int f(r) dr$. Στη συνέχεια ναδειχθεί ότι η κίνηση του σωματιδίου μπορεί να περιγραφεί και από την εξίσωση

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2 = \frac{2(E - V)}{mh^2},$$

όπου E το άθροισμα κινητικής και δυναμικής ενέργειας.

2. Ένα σωματίδιο, το οποίο κινείται κάτω από την επίδραση κεντρικής δύναμης, περιγράφει την καμπύλη $r(\theta + 1)^2 = a$, όπου a είναι σταθερά. Όταν το σωματίδιο βρίσκεται στη θέση $\theta = 0$, δέχεται μια ώθηση η οποία διπλασιάζει την εφαπτομενική συνιστώσα και μηδενίζει την κάθετη συνιστώσα της ταχύτητας. Ναδειχθεί ότι η εξίσωση της νέας τροχιάς του σωματιδίου είναι

$$\frac{3a}{2r} = 1 + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\theta\right).$$

3. Έστω ένα σύστημα συντεταγμένων S' που περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω γύρω από ένα σύστημα συντεταγμένων S , όπου S και S' έχουν κοινή αρχή. Να δοθεί η σχέση που συνδέει την απόλυτη παράγωγο και την σχετική παράγωγο. Ναδειχθεί ότι ο δεύτερος νόμος του Newton, ως προς το περιστρεφόμενο σύστημα S' , γράφεται

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F} - 2m\omega \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} - m\omega \times (\omega \times \mathbf{r}).$$

Ένα σωματίδιο κινείται ελεύθερα κοντά στην επιφάνεια της Γης. Ναδειχθεί ότι η εξίσωση κίνησης δίνεται κατά προσέγγιση από τον τύπο

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} + 2\omega \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{g},$$

όπου ω είναι η γωνιακή ταχύτητα της περιστροφής της Γης.

Αν το αρχικό διάνυσμα είναι \mathbf{r}_0 και η αρχική ταχύτητα \mathbf{v}_0 , ναδειχθεί ότι το διάνυσμα θέσης σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή είναι

$$\mathbf{r} = \frac{1}{2}t^2 \mathbf{g} - \frac{1}{3}t^3 \omega \times \mathbf{g} - t^2 \omega \times \mathbf{v}_0 + t\mathbf{v}_0 + \mathbf{r}_0.$$

4. (Μπορεί να χρησιμοποιηθεί η άσκηση 3). Ένα σωματίδιο ρίχνεται κατακόρυφα προς τα κάτω με ταχύτητα u από ύψος h πάνω από την επιφάνεια της Γης. Ναδειχθεί ότι το σωματίδιο, όταν κτυπήσει στην επιφάνεια της Γης, θα έχει μετατόπιση. Ναδοθεί η μετατόπιση και ναπροσδιοριστεί η κατεύθυνση στην οποία το σωματίδιο έχει μετατόπιση.

5. Ένα σύστημα αποτελείται από δύο σωματίδια με μάζα m_1 και m_2 , αντίστοιχα. Τα σωματίδια κινούνται κάτω από την επίδραση μόνο εσωτερικών δυνάμεων. Να αποδειχθεί ότι η κίνηση του συστήματος μπορεί να περιγραφεί και με ένα σωματίδιο μάζας

$$M = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}.$$

Ναδειχθεί ότι το κέντρο μάζας του συστήματος μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως αρχή ενός αδρανειακού συστήματος αξόνων.

Επίσης ναδειχθεί ότι η διαφορά της κινητικής ενέργειας ως προς το κέντρο μάζας και της κινητικής ενέργειας ως προς την αρχή των αξόνων είναι ίση με

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)\bar{v}^2,$$

όπου \bar{v} η ταχύτητα του κέντρου μάζας.

6. Τρεις ομοιόμορφες σφαίρες A, B και Γ βρίσκονται σε ευθεία γραμμή, πάνω σε ομαλό οριζόντιο τραπέζι. Ο συντελεστής κρούσης μεταξύ τους είναι ίσος με e . Η σφαίρα A κινείται προς τη B με ταχύτητα u . Να βρεθεί η ταχύτητα της B μετά την κρούση. Στη συνέχεια η B συγκρούεται με την Γ. Αν η Γ, μετά την κρούση, κινείται με ταχύτητα $\frac{9u}{16}$, να βρεθεί η τιμή του e .

Ναδειχθεί ότι μετά τις δύο κρούσεις, $\frac{75}{128}$ της αρχικής ενέργειας έχουν χαθεί.