**ΕΞΕΤΑΣΗ 2 - 23/11/2022**

---

**1**. Να δειχθεί ότι η κίνηση ενός σωματιδίου $P$ μάζας $m$ που κινείται κάτω από την επίδραση κεντρικής δύναμης $mf(r)\mathbf{r}_1$, όπου $\mathbf{r}_1$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση $OP$ ($O$ η αρχή των αξόνων), περιγράφεται από τις εξισώσεις

$$r^2\dot{\theta} = h \;\text{ και }\; \ddot{r} - \frac{h^2}{r^3} = f(r),$$

όπου $r$ και $\theta$ είναι οι πολικές συντεταγμένες του σωματιδίου $P$ και $h$ είναι στροφορμή του $P$ ανά μονάδα μάζας.
Χρησιμοποιώντας τις πιο πάνω εξισώσεις να δειχθεί ότι

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\theta^2} + u = -\frac{f\left(\frac{1}{u}\right)}{h^2u^2}, \quad u = \frac{1}{r}.$$

**2**. Έστω ότι ισχύουν τα δεδομένα της άσκησης **1** με $f(r) = -\frac{k}{r^2}$ ($k$ σταθερά). Αν αρχικά το σωματίδιο εκτοξεύεται από το σημείο Α, όπου ΟΑ$=a$, με ταχύτητα $\sqrt{\frac{2k}{a}}$ η οποία σχηματίζει γωνία $\frac{\pi}{6}$ με την ΑΟ, να δειχθεί ότι η εξίσωση της τροχιάς είναι

$$r = \frac{a}{4}\sec^2\left(\frac{\theta}{2} + \frac{2\pi}{3}\right).$$

**3**. Έστω ένα σύστημα συντεταγμένων $S'$ που περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\omega$ γύρω από ένα σύστημα συντεταγμένων $S$, όπου $S$ και $S'$ έχουν κοινή αρχή. Να δοθεί η σχέση που συνδέει την απόλυτη παράγωγο και την σχετική παράγωγο. Να δειχθεί ότι ο δεύτερος νόμος του Newton, ως προς το περιστρεφόμενο σύστημα $S'$, γράφεται

$$m\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2} = \mathbf{F} - 2m\omega \times \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} - m\omega \times (\omega \times \mathbf{r}).$$

Ένα σωματίδιο κινείται ελεύθερα κοντά στην επιφάνεια της Γης. Να δειχθεί ότι η εξίσωση κίνησης δίνεται κατά προσέγγιση από τον τύπο

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2} + 2\omega \times \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{g},$$

όπου $\omega$ είναι η γωνιακή ταχύτητα της περιστροφής της Γης.
Αν το αρχικό διάνυσμα είναι $\mathbf{r}_0$ και η αρχική ταχύτητα $\mathbf{v}_0$, να δειχθεί ότι το διάνυσμα θέσης σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή είναι

$$\mathbf{r} = \frac{1}{2}t^2\mathbf{g} - \frac{1}{3}t^3\omega \times \mathbf{g} - t^2\omega \times \mathbf{v}_0 + t\mathbf{v}_0 + \mathbf{r}_0.$$

**4**. (Μπορεί να χρησιμοποιηθεί η άσκηση 3). Ένα σωματίδιο εκτοξεύεται με ταχύτητα $u\mathbf{j} + v\mathbf{k}$. Να δειχθεί ότι ο χρόνος που χρειάστηκε το σωματίδιο να φθάσει ξανά το οριζόντιο επίπεδο στο οποίο βρίσκεται το σημείο εκτόξευσης είναι κατά προσέγγιση ίσος με

$$\frac{2v}{g}\left(1 + \frac{2u}{g}\omega\cos\lambda\right),$$

όπου $\omega$ είναι η γωνιακή ταχύτητα με την οποία περιστρέφεται η Γη.

$[(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + ..., |x| < 1\,]$

**5**. Έστω ένα σύστημα N σωματιδίων μάζας $m_k$, με διανύσματα θέσης $r_k$ ως προς $O$ (αρχή ενός αδρανειακού συστήματος συντεταγμένων) και $\mathbf{r}'_k$ ως προς το $C$ (κέντρο μάζας του συστήματος). Επίσης έστω $\bar{\mathbf{r}}$ το διάνυσμα θέσης του $C$ ως προς το $O$. Να δειχθεί ότι:

$$\boldsymbol{\Omega} = \sum_{k=1}^{N} m_k\left(\mathbf{r}'_k \times \mathbf{v}'_k\right) + M\left(\bar{\mathbf{r}} \times \bar{\mathbf{v}}\right),$$

$$T = \frac{1}{2}M\bar{\mathbf{v}}^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} m_k \mathbf{v}'^2_k,$$

όπου $\Omega$ είναι η ολική στροφορμή, $T$ η ολική κινητική ενέργεια και $M$ η ολική μάζα του συστήματος. (Με $\mathbf{v}$ συμβολίζουμε τις αντίστοιχες ταχύτητες.)

**6**. Τρεις ομαλές σφαίρες Α, Β και Γ με την ίδια ακτίνα και μάζες $2m$, $7m$ και $14m$ αντίστοιχα, βρίσκονται πάνω σε ευθεία γραμμή πάνω σε ομαλό οριζόντιο τραπέζι. Ο συντελεστής κρούσης μεταξύ κάθε ζεύγους σφαιρών είναι ίσος με $e = \frac{1}{2}$. Η σφαίρα Α εκτοξεύεται με ταχύτητα $u$ προς την σφαίρα Β. Να βρεθεί ο αριθμός των κρούσεων που θα γίνουν και οι ταχύτητες των σφαιρών μετά από την τελική κρούση.