

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ



ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΚΛΑΣΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ

(ΜΑΣ 482)

ΤΕΛΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ

Πέμπτη 13 Δεκεμβρίου, 2018

1. (α) Μια μπάλα εκτοξεύεται με ταχύτητα u που σχηματίζει γωνία θ με την οριζόντιο και από ύψος h από το έδαφος. Η μπάλα κτυπά σε κατακόρυφο τοίχο που βρίσκεται σε απόσταση d . Αν η μπάλα κτυπά τον τοίχο σε ύψος H , ναδειχθεί ότι

$$H = d \tan \theta - \frac{gd^2}{2u^2} \sec^2 \theta + h.$$

Να βρεθεί η τιμή της $\tan \theta$ έτσι ώστε το H να παίρνει τη μέγιστη τιμή.

(β) Σωματίδιο μάζας m εκτοξεύεται κατακόρυφα προς τα πάνω με ταχύτητα u . Η αντίσταση του αέρα έχει μέτρο ίσο με kv , όπου k είναι σταθερά και v είναι η στιγμιαία ταχύτητα. Ναδειχθεί ότι σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή, όταν το σωματίδιο κινείται προς τα πάνω, η ταχύτητα είναι ίση με

$$-\frac{mg}{k} + \left(\frac{mg}{k} + u\right) e^{-\frac{kt}{m}}.$$

Στη συνέχεια να βρεθεί το μέγιστο ύψος που θα φθάσει το σωματίδιο και ο χρόνος που χρειάστηκε για να φθάσει στο μέγιστο ύψος.

2. Ένα σωματίδιο κινείται σε μια ευθεία γραμμή με τέτοιο τρόπο έτσι ώστε η απόσταση του από σταθερό σημείο O τη χρονική στιγμή t να είναι ίση με

$$x = a \cos(\omega t - \phi),$$

όπου a , ω και ϕ είναι θετικές σταθερές. Η περίοδος της κίνησης είναι $16s$. Σε συγκεκριμένη χρονική στιγμή το σωματίδιο βρίσκεται σε απόσταση $5m$ από το O και $4s$ αργότερα βρίσκεται στην ίδια πλευρά από το O και σε απόσταση $12m$. Να βρεθούν οι τιμές των a , ω και ϕ .

Ναδειχθεί ότι μετά από ακόμη $4s$ το σωματίδιο βρίσκεται στην άλλη πλευρά του O και σε απόσταση $5m$. Να βρεθεί η ταχύτητα (μέτρο και κατεύθυνση) και η επιτάχυνση σε αυτό το σημείο. Επίσης να βρεθεί ο χρόνος που χρειάστηκε να επιστρέψει σε αυτό το σημείο.

3. Να δοθούν οι εξισώσεις κίνησης σε πολικές συντεταγμένες.

Ένα σωματίδιο P με μάζα m και διάνυσμα θέσης \mathbf{r} κινείται κάτω από την επίδραση κεντρικής δύναμης $m f(r) \mathbf{r}_1$, όπου \mathbf{r}_1 είναι το μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση OP (O η αρχή των αξόνων). Έστω ότι (r, θ) είναι οι πολικές συντεταγμένες και h είναι η στροφορμή ανά μονάδα μάζας του σωματιδίου P . Να δειχθεί ότι h είναι σταθερό κατά τη διάρκεια της κίνησης και στη συνέχεια να αποδειχθεί ότι η θέση του σωματιδίου προσδιορίζεται από τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = -\frac{f\left(\frac{1}{u}\right)}{h^2 u^2}, \quad u = \frac{1}{r}.$$

Σωματίδιο P εκτοξεύεται από το σημείο $r = a$ της ευθείας $\theta = 0$ με εφαπτομενική και κάθετη ταχύτητα ίσες με \sqrt{a} . Στο σωματίδιο ασκείται δύναμη με μέτρο ίσο με

$$f(r) = 4 \left(\frac{a}{r}\right)^2 - 3 \left(\frac{a}{r}\right)^3$$

ανά μονάδα μάζας και κατεύθυνση προς το O . Να βρεθεί η ελάχιστη και η μέγιστη απόσταση του σωματιδίου από το O . Στη συνέχεια να βρεθεί η γωνία που διαγράφει η διανυσματική ακτίνα μεταξύ του πρώτου μεγίστου και του επομένου ελαχίστου.

4. Έστω ένα σύστημα συντεταγμένων S' που περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω γύρω από ένα σύστημα συντεταγμένων S , όπου S και S' έχουν κοινή αρχή. Να δοθεί ο ορισμός της απόλυτης και σχετικής ταχύτητας και στη συνέχεια να δοθεί σχέση η οποία τις συνδέει.

Να δειχθεί ότι ο δεύτερος νόμος του Newton, ως προς το περιστρεφόμενο σύστημα, γράφεται

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F} - 2m\boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}).$$

Ένα σωματίδιο εκτοξεύεται με αρχικό διάνυσμα \mathbf{r}_0 και αρχική ταχύτητα $\dot{\mathbf{r}}_0$ και κινείται κοντά στην επιφάνεια της Γης. Αν η γωνιακή ταχύτητα της περιστροφής της Γης είναι ίση με $\boldsymbol{\omega} = -\omega \cos \lambda \mathbf{i} + \omega \sin \lambda \mathbf{k}$, όπου λ είναι το γεωγραφικό πλάτος του σημείου εκτόξευσης, και αν υποθέσουμε ότι $\mathbf{g}' \approx -g\mathbf{k}$ και $\omega^2 \approx 0$, τότε να δειχθεί ότι το διάνυσμα θέσης του σωματιδίου κατά την διάρκεια της κίνησης είναι κατά προσέγγιση ίσο με

$$\mathbf{r} = \frac{1}{2} t^2 \mathbf{g} - \frac{1}{3} t^3 \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{g} - t^2 \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}_0 + t \dot{\mathbf{r}}_0 + \mathbf{r}_0.$$

Ένα σωματίδιο ρίχνεται κατακόρυφα προς τα κάτω με ταχύτητα u από ύψος h πάνω από την επιφάνεια της Γης. Να δειχθεί ότι το σωματίδιο έχει μετατόπιση. Να δοθεί η μετατόπιση και να προσδιοριστεί η κατεύθυνση στην οποία το σωματίδιο έχει μετατόπιση.

5. Να διατυπωθεί ο κανόνας κρούσης του Newton.

Δύο ομαλές σφαίρες A και B με μάζες $2m$ και m αντίστοιχα, έχουν ταχύτητες $3u\mathbf{i} + 4u\mathbf{j}$ και $-4u\mathbf{i} + 3u\mathbf{j}$ αντίστοιχα, όταν συγκρούονται. Κατά την κρούση η κοινή τους κάθετη είναι παράλληλη με το μοναδιαίο διάνυσμα \mathbf{i} . Μετά την κρούση η μείωση της κινητικής ενέργειας είναι ίση με την κινητική ενέργεια της σφαίρας B πριν τη κρούση. Να βρεθεί η τιμή του συντελεστή κρούσης e μεταξύ των δύο σφαιρών.

6. Να διατυπωθεί το θεώρημα των παράλληλων αξόνων για ροπές αδράνειας.

Ένα τετράγωνο στερεό $AB\Gamma\Delta$ είναι κατασκευασμένο με τέσσερις ομοιόμορφες ράβδους μήκους $2a$ και μάζας m . Το τετράγωνο μπορεί να περιστραφεί γύρω από άξονα που διέρχεται από το A και είναι κάθετος στο επίπεδο του τετραγώνου.

(i) Ναδειχθεί ότι η ροπή αδράνειας της ράβδου $B\Gamma$ γύρω από τον άξονα περιστροφής είναι ίση με $\frac{16}{3}ma^2$.

(ii) Σωματίδια με μάζες $4m$, $3m$, $2m$ και m στερεώνονται στις κορυφές A , B , Γ και Δ , αντίστοιχα. Ναδειχθεί ότι η ροπή αδράνειας του συστήματος γύρω από τον άξονα περιστροφής είναι ίση με $\frac{136}{3}ma^2$.

(iii) Το σύστημα αφήνεται να περιστραφεί από ηρεμία όταν $A\Delta$ είναι οριζόντια και B κατακόρυφα πάνω από το A . Να βρεθεί η γωνιακή ταχύτητα του συστήματος, συναρτήσει του a και g , όταν το B βρίσκεται κατακόρυφα κάτω από το A .

7. Μια ομοιόμορφη ράβδος, μήκους $2a$ και βάρους W , βρίσκεται σε ισορροπία με το πάνω άκρο B να ακουμπά σε ομαλό κατακόρυφο τοίχο και το άκρο A συνδέεται με σπάγκο με το σημείο Γ που βρίσκεται στον τοίχο και κατακόρυφα πάνω από το B .

(i) Αν σε ισορροπία η AB σχηματίζει γωνία $\frac{\pi}{3}$ με την κατακόρυφη, να υπολογιστεί το μήκος του σπάγκου.

(ii) Όταν ένα σωματίδιο βάρους kW , όπου k είναι σταθερά, συνδέεται στο άκρο B της ράβδου, τότε η ράβδος ισορροπεί όταν σχηματίζει γωνία $\frac{\pi}{6}$ με την κατακόρυφη. Να βρεθεί η τιμή της σταθεράς k .

8. Δύο σωματίδια A και B εκτοξεύονται ταυτόχρονα και κινούνται σε κατακόρυφο επίπεδο. Το σωματίδιο A εκτοξεύεται προς τα δεξιά από την αρχή των αξόνων με ταχύτητα au ($a > 0$) που σχηματίζει γωνία θ με την οριζόντιο. Το σωματίδιο B εκτοξεύεται προς τα αριστερά από το σημείο (h, k) ($h > 0$, $k > 0$) με ταχύτητα u που σχηματίζει γωνία ϕ με την οριζόντιο. Να βρεθούν τα διανύσματα θέσης των σωματιδίων μετά από χρόνο t . Στη συνέχεια ναδειχθεί ότι τα σωματίδια θα συγκρουστούν αν $\sin \phi < a \sin \theta$ και αν ισχύει η σχέση

$$\sin(\phi + \omega) = a \sin(\theta - \omega), \quad \tan \omega = \frac{k}{h}.$$