

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ



ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΚΛΑΣΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ

(ΜΑΣ 482)

ΤΕΛΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ

Κυριακή 16 Μαΐου, 2021

1. Ένα σωματίδιο εκτοξεύεται με ταχύτητα u με γωνία θ με ένα κεκλιμένο επίπεδο που σχηματίζει γωνία ϕ με το οριζόντιο επίπεδο, όπου $\theta + \phi < \frac{\pi}{2}$. Το σωματίδιο κτυπά στο επίπεδο και επιστρέφει στο σημείο εκτόξευσης κατά μήκος της ίδιας διαδρομής. Να δειχθεί ότι

$$2 \tan \theta \tan \phi = 1 \quad \text{και} \quad R = \frac{u^2 \cos^2 \theta}{2g \sin \phi},$$

όπου R είναι το βεληνεκές της βολής. Στη συνέχεια να δειχθεί ότι

$$\frac{2u^2}{gR} = 3 \sin \phi + \operatorname{cosec} \phi$$

και χρησιμοποιώντας αυτή τη σχέση, να δειχθεί ότι

$$R_{MAX} = \frac{u^2}{\sqrt{3g}}.$$

$$[\sec^2 \phi = 1 + \tan^2 \phi, \quad \operatorname{cosec}^2 \phi = 1 + \cot^2 \phi]$$

2. Το ένα άκρο ενός ελαστικού σπάγκου (που δεν έχει βάρος) είναι στερεωμένο στο σημείο A και στο άλλο άκρο έχει ένα σωματίδιο P μάζας $2m$. Το φυσικό μήκος του ελαστικού σπάγκου είναι ίσο με $3a$ και η ελαστική σταθερά του είναι ίση με $\frac{2mg}{a}$. Το σωματίδιο βρίσκεται σε ισορροπία στο σημείο O που είναι κατακόρυφα κάτω από το A .

(i) Να βρεθεί το μήκος AO .

Το σωματίδιο μετακινείται κατακόρυφα προς τα πάνω στο σημείο C που βρίσκεται κάτω από το A με $AC > 3a$ και αφήνεται να κινηθεί από ηρεμία.

(ii) Να δειχθεί ότι το σωματίδιο κινείται σε απλή αρμονική κίνηση και να βρεθεί η περίοδος της κίνησης.

(iii) Αν $OC = \frac{a}{4}$, να βρεθεί η μέγιστη ταχύτητα κατά τη διάρκεια της κίνησης.

(iv) Το σημείο D είναι κατακόρυφα πάνω από το O με $OD = \frac{a}{8}$. Ο σπάγκος κόβεται όταν το σωματίδιο κινείται προς τα πάνω και διέρχεται από το σημείο D . Να βρεθεί το μέγιστο ύψος πάνω από το O που θα φθάσει το σωματίδιο.

3. Να δοθούν οι εξισώσεις κίνησης σε πολικές συντεταγμένες.

Ένα σωματίδιο P με μάζα m και διάνυσμα θέσης \mathbf{r} κινείται κάτω από την επίδραση κεντρικής δύναμης $m f(r) \mathbf{r}_1$, όπου \mathbf{r}_1 είναι το μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση OP (O η αρχή των αξόνων). Έστω ότι (r, θ) είναι οι πολικές συντεταγμένες και h είναι η στροφορμή ανά μονάδα μάζας του σωματιδίου P . Να δειχθεί ότι h είναι σταθερό κατά τη διάρκεια της κίνησης και στη συνέχεια να αποδειχθεί ότι η θέση του σωματιδίου προσδιορίζεται από τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = -\frac{f\left(\frac{1}{u}\right)}{h^2 u^2}, \quad u = \frac{1}{r}.$$

Αν το σωματίδιο P εκτοξεύεται από το σημείο $r = a$ m της ευθείας $\theta = 0$ με ταχύτητα $u = \sqrt{\frac{\mu}{3}} \frac{1}{a} \text{ ms}^{-1}$ που σχηματίζει ορθή γωνία με την OP και η δύναμη που ασκείται πάνω στο σωματίδιο είναι ίση με

$$\mathbf{F} = \frac{m\mu}{r^3} \mathbf{r}_1,$$

τότε να βρεθεί η τροχιά του σωματιδίου. Στη συνέχεια να εκφραστούν οι συντεταγμένες $r(t)$ και $\theta(t)$ ως προς t .

4. Έστω ένα σύστημα συντεταγμένων S' που περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω γύρω από ένα σύστημα συντεταγμένων S , όπου S και S' έχουν κοινή αρχή. Να δοθεί ο ορισμός της απόλυτης και σχετικής ταχύτητας και στη συνέχεια να δοθεί σχέση η οποία τις συνδέει.

Να δειχθεί ότι ο δεύτερος νόμος του Newton, ως προς το περιστρεφόμενο σύστημα, γράφεται

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F} - 2m\boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}).$$

Ένα σωματίδιο εκτοξεύεται με αρχικό διάνυσμα \mathbf{r}_0 και αρχική ταχύτητα $\dot{\mathbf{r}}_0$ και κινείται κοντά στην επιφάνεια της Γης. Αν η γωνιακή ταχύτητα της περιστροφής της Γης είναι ίση με $\boldsymbol{\omega} = -\omega \cos \lambda \mathbf{i} + \omega \sin \lambda \mathbf{k}$, όπου λ είναι το γεωγραφικό πλάτος του σημείου εκτόξευσης, και αν υποθέσουμε ότι $\mathbf{g}' \approx -g\mathbf{k}$ και $\omega^2 \approx 0$, τότε να δειχθεί ότι το διάνυσμα θέσης του σωματιδίου κατά την διάρκεια της κίνησης είναι κατά προσέγγιση ίσο με

$$\mathbf{r} = \frac{1}{2} t^2 \mathbf{g} - \frac{1}{3} t^3 \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{g} - t^2 \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}_0 + t \dot{\mathbf{r}}_0 + \mathbf{r}_0.$$

Ένα σωματίδιο εκτοξεύεται προς την ανατολή από ένα σημείο πάνω στην επιφάνεια της Γης που έχει γεωγραφικό πλάτος ίσο με λ . Η γωνιακή ταχύτητα της περιστροφής της Γης είναι ίση με $\boldsymbol{\omega}$. Η ταχύτητα εκτόξευσης είναι ίση με u και σχηματίζει γωνία θ με την οριζόντιο. Να βρεθεί κατά προσέγγιση ο χρόνος που χρειάστηκε το σωματίδιο για να επιστρέψει στην επιφάνεια της Γης. Επίσης να δειχθεί ότι, όταν το σωματίδιο θα κτυπήσει στην επιφάνεια της Γης, θα έχει μετατόπιση κατά προσέγγιση ίση με

$$\frac{4u^3}{g^2} \omega \sin \lambda \sin^2 \theta \cos \theta,$$

και να προσδιοριστεί προς πια κατεύθυνση είναι η μετατόπιση.

$$[(1 - x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots]$$

5. Να διατυπωθεί ο κανόνας κρούσης του Newton.

Έστω A και B δύο ομοιόμορφες ομαλές σφαίρες. Η A κινείται με ταχύτητα u και συγκρούεται με την B , η οποία ήταν σε ηρεμία. Πριν τη κρούση η ταχύτητα u σχηματίζει γωνία $\frac{\pi}{6}$ με την κοινή κάθετη των δύο σφαιρών. Ο συντελεστής κρούσης μεταξύ των δύο σφαιρών είναι e .

(i) Να βρεθεί η ταχύτητα της B μετά την κρούση, συναρτήσει του u και e .

(ii) Να βρεθούν οι συνιστώσες της ταχύτητας της A παράλληλα και κάθετα στη κοινή κάθετο, μετά τη κρούση.

(iii) Αν $e = \frac{2}{3}$, να βρεθεί η γωνία που σχηματίζει η ταχύτητα της A μετά την κρούση με την κοινή κάθετο.

6. Να διατυπωθεί το θεώρημα των παράλληλων αξόνων για ροπές αδράνειας.

Έστω ο δακτύλιος μάζας m και ακτίνας a . Οι διάμετροι AC και BD του δακτυλίου τέμνονται κάθετα. Δύο σωματίδια μάζας m είναι προσκολλημένα στα σημεία A και B , αντίστοιχα. Να βρεθεί η ροπή αδράνειας του συστήματος γύρω από άξονα διερχόμενο από το σημείο D και κάθετο στο επίπεδο του δακτυλίου.

Το σύστημα είναι ελεύθερο να περιστραφεί σε κατακόρυφο επίπεδο γύρω από τον άξονα που διέρχεται από το D . Το σύστημα αφήνεται να κινηθεί από ηρεμία όταν η διάμετρος BD είναι οριζόντια. Να βρεθεί η γωνιακή ταχύτητα του συστήματος όταν η διάμετρος BD είναι για πρώτη φορά κατακόρυφη.

7. Να διατυπωθεί το θεώρημα των καθέτων αξόνων για ροπές αδράνειας.

Δίνεται τετραγωνική πλάκα μήκους a η οποία βρίσκεται στο επίπεδο xy . Να βρεθούν:

(i) οι ροπές αδράνειας,

(ii) τα γινόμενα αδράνειας,

(iii) οι κύριες ροπές αδράνειας,

(iv) οι διευθύνσεις των κύριων αξόνων.

8. Ένα σωματίδιο μάζας m εκτοξεύεται κατακόρυφα προς τα πάνω με αρχική ταχύτητα u . Την χρονική στιγμή που φθάνει στο μέγιστο ύψος, ένα δεύτερο σωματίδιο, μάζας $2m$, εκτοξεύεται κατακόρυφα προς τα πάνω με αρχική ταχύτητα $2u$ από το ίδιο σημείο που εκτοξεύτηκε και το πρώτο σωματίδιο. Ναδειχθεί ότι ο χρόνος που χρειάστηκε το δεύτερο σωματίδιο για να συγκρουστεί με το πρώτο είναι $\frac{u}{4g}$ και να βρεθεί το ύψος πάνω από το σημείο εκτόξευσης στο οποίο έγινε η κρούση.

Κατά την κρούση τα δύο σωματίδια γίνονται ένα. Να βρεθεί το μέγιστο ύψος που θα φθάσει πάνω από το σημείο εκτόξευσης το συνδυασμένο σωματίδιο.