ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΚΛΑΣΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ
(ΜΑΣ 482)

ΤΕΛΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ

Πέμπτη 15 Δεκεμβρίου, 2022

---

1. Σωματίδιο A εκτοξεύεται από το σημείο O με ταχύτητα u ms^{-1} που σχηματίζει γωνία θ με την οριζόντιο. Την ίδια χρονική στιγμή σωματίδιο B εκτοξεύεται οριζόντια με ταχύτητα v ms^{-1} από το σημείο D που βρίσκεται σε απόσταση d m κατακόρυφα πάνω από το O. Αν τα σωματίδια συγκρούονται, τότε να δειχθεί ότι $v = u\cos\theta$ και να βρεθεί μια δεύτερη σχέση που πρέπει να ικανοποιείται.

Δίνεται ότι $u = 51,\ v = 45$ και $d = 60$. Να βρεθεί το διάνυσμα θέσης των δύο σωματιδίων κατά την κρούση και η ταχύτητα του A ακριβώς πριν τη κρούση (μέτρο και κατεύθυνση).

[$g = 10\ \mathrm{ms}^{-2}$]

2. Να διατυπωθεί ο νόμος του Hooke και με τη χρήση του να αποδειχθεί ο τύπος για την ελαστική δυναμική ενέργεια ενός ελαστικού σπάγκου.

Το ένα άκρο ενός ελαστικού σπάγκου (που δεν έχει βάρος) είναι στερεωμένο στο σταθερό σημείο O και στο άλλο άκρο έχει ένα σωματίδιο P μάζας m. Το φυσικό μήκος του ελαστικού σπάγκου είναι ίσο με a και η ελαστική σταθερά του είναι ίση με $\frac{3mg}{a}$. Το σωματίδιο P εκτοξεύεται κατακόρυφα προς τα κάτω από το O με ταχύτητα ίση με $\sqrt{3ga}$.

(i) Να βρεθεί η ταχύτητα του P όταν βρίσκεται σε απόσταση x $(x > a)$ από το O.

(ii) Να βρεθεί η μέγιστη απόσταση που θα φθάσει το P κάτω από το O.

(iii) Να βρεθεί η μέγιστη ταχύτητα του P.

3. Να δοθούν οι εξισώσεις κίνησης ενός σωματιδίου σε πολικές συντεταγμένες.

Να αποδειχθεί ότι ένα σωματίδιο P μάζας m που κινείται κάτω από την επίδραση της κεντρικής δύναμης $mf(r)\mathbf{r}_1$, όπου $\mathbf{r}_1$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση OP (O η αρχή των αξόνων), ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2} + u = -\frac{f\left(\frac{1}{u}\right)}{h^2u^2},\ \ u = \frac{1}{r},$$

όπου r και θ είναι οι πολικές συντεταγμένες του σωματιδίου P και h είναι η στροφορμή του P ανά μονάδα μάζας.

Ένα σωματίδιο κινείται πάνω σε κύκλο ακτίνας a κάτω από την επίδραση μιας κεντρικής δύναμης $\frac{\mu}{r^2}$ ανά μονάδα μάζας με κατεύθυνση προς το κέντρο του κύκλου. Σε κάποια χρονική στιγμή δίνεται στο σωματίδιο ακτινιακή (κάθετη) ταχύτητα $\sqrt{\frac{\mu}{5a}}$ προς τα έξω με τέτοιον τρόπο έτσι ώστε να μην αλλάξει η εφαπτομενική ταχύτητά του. Να βρεθεί η εξίσωση της νέας τροχιάς του σωματιδίου.

4. Έστω ένα σύστημα συντεταγμένων S' που περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω γύρω από ένα σύστημα συντεταγμένων S, όπου S και S' έχουν κοινή αρχή. Να δοθεί ο ορισμός της απόλυτης και σχετικής ταχύτητας και στη συνέχεια να δοθεί σχέση η οποία τις συνδέει.

Να δειχθεί ότι ο δεύτερος νόμος του Newton, ως προς το περιστρεφόμενο σύστημα, γράφεται

$$m\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2} = \mathbf{F} - 2m\omega \times \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} - m\omega \times (\omega \times \mathbf{r}).$$

Ένα σύρμα AB μήκους a που είναι σε σχήμα ευθείας γραμμής περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω γύρω από σταθερό κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το άκρο A. Μια χάντρα, που μπορεί να κινηθεί πάνω στο σύρμα, εκτοξεύεται από το A με ταχύτητα u. Αν η τριβή είναι αμελητέα και το σύρμα περιστρέφεται σε οριζόντιο επίπεδο, να προσδιοριστεί η θέση της χάντρας σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή. Να δειχθεί ότι ο χρόνος που χρειάστηκε μέχρι να φθάσει η χάντρα στο άκρο B είναι ίσος με

$$t = \frac{1}{\omega}\sinh^{-1}\left(\frac{\omega a}{u}\right).$$

Να βρεθεί η ταχύτητα της χάντρας όταν φτάσει στο άκρο B. Επίσης να βρεθεί η αντίσταση που ασκείται πάνω στην χάντρα όταν βρίσκεται στο B.

5. Να διατυπωθεί ο κανόνας κρούσης του Newton.

Τρεις ομοιόμορφες σφαίρες A, B και C με μάζες m, km και k^2m αντίστοιχα, όπου k είναι σταθερά, βρίσκονται σε μια ευθεία γραμμή πάνω σε ομαλό οριζόντιο τραπέζι. Ο συντελεστής κρούσης μεταξύ των σφαιρών είναι ίσος με e. Οι σφαίρες B και C βρίσκονται σε ηρεμία. Η σφαίρα A εκτοξεύεται με ταχύτητα u και συγκρούεται με τη σφαίρα B.

(i) Να δειχθεί ότι οι ταχύτητες των A και B μετά την πρώτη κρούση είναι ίσες με $\frac{1-ke}{k+1}u$ και $\frac{1+e}{k+1}u$, αντίστοιχα.

(ii) Να βρεθούν οι ταχύτητες των B και C μετά την δεύτερη κρούση.

(iii) Αν $ke < 1$, τότε να βρεθεί μια δεύτερη σχέση μεταξύ k και e έτσι ώστε να υπάρξει μια τρίτη κρούση.

6. Να διατυπωθεί το θεώρημα των παράλληλων αξόνων για ροπές αδράνειας.

Να δειχθεί ότι η ροπή αδράνειας κυκλικού δίσκου μάζας m και ακτίνας a γύρω από άξονα κάθετο στο επίπεδο του δίσκου και διερχόμενο από σημείο της περιφέρειας είναι ίση με $\frac{3}{2}ma^2$.

Ένας κυκλικός δίσκος μάζας m και ακτίνας a μπορεί να περιστραφεί σε κατακόρυφο επίπεδο γύρω από άξονα που διέρχεται από το σημείο A που βρίσκεται πάνω στη περιφέρεια του δίσκου. Αρχικά η διάμετρος που περνά από το A είναι κατακόρυφη με το A από κάτω. Αν ο δίσκος αφήνεται ελεύθερος για να κινηθεί, να υπολογιστούν

(i) η αντίσταση στο A όταν η διάμετρος που διέρχεται από το A σχηματίζει γωνία θ με την κατακόρυφο,

(ii) η γωνιακή ταχύτητα του δίσκου όταν για πρώτη φορά η ίδια διάμετρος είναι κατακόρυφη.

7. Μια ράβδος AB μήκους $2a$ και βάρους W η οποία ακουμπά σε ομαλό κατακόρυφο τοίχο (δεν έχει τριβή), βρίσκεται σε ισορροπία. Το άκρο B είναι σε επαφή με οριζόντιο επίπεδο που έχει συντελεστή τριβής μ και η AB σχηματίζει γωνία $\theta = \tan^{-1} 2$. Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή του συντελεστή τριβής μ.

Αν $\mu = \frac{5}{16}$, να βρεθεί η μέγιστη απόσταση από το B του σημείου πάνω στη ράβδο που μπορεί να τοποθετηθεί σωματίδιο βάρους W, έτσι ώστε να διατηρηθεί η ισορροπία.

8. Μια μπάλα ρίχνεται προς τα κάτω και κτυπά σε οριζόντιο τραπέζι με ταχύτητα $4\sqrt{2}\ \mathrm{ms}^{-1}$ που σχηματίζει γωνία $\frac{\pi}{4}$ με το τραπέζι. Αν ο συντελεστής κρούσης μεταξύ μπάλας και τραπεζιού είναι ίσος με $\frac{1}{2}$, να βρεθούν

(i) το ύψος πάνω από τα τραπέζι που θα φθάσει η μπάλα μετά την κρούση,

(ii) ο χρόνος που χρειάστηκε η μπάλα από την πρώτη κρούση μέχρι να κτυπήσει το τραπέζι για δεύτερη φορά,

(iii) η απόσταση μεταξύ πρώτης και δεύτερης κρούσης.

[$g = 10\ \mathrm{ms}^{-2}$]