LAB 11

Πρόβλημα # 1:

Έστω p το ποσοστό του εκλογικού σώματος που υποστηρίζει τον υποψήφιο Α.

Έστω $H_0 : p = \frac{1}{2}$ προς $H_a = p \neq \frac{1}{2}$ και θεωρώ δείγμα 25 ψηφοφόρων.

Θέτω X για τον αριθμό ψηφοφόρων που θα ψηφίσουν τον Α.

Υποθέτω ότι η H_0 απορρίπτεται αν $x \leq 7$ ή $x \geq 18$.

α) Να βρεθεί το σφάλμα τύπου Ι

β) Να βρεθεί το σφάλμα τύπου ΙΙ για $p = \frac{3}{10}, \frac{6}{10}$

γ) Αν $x = 6$ ποιο είναι το συμπέρασμα;

Λύση:

α) $a : P(H_0 / H_a) = P\left(x \leq 7 ή . x \geq 18 / x \sim Bin(25, \frac{1}{2})\right)$

$= 1 - P(7 < x < 8) = 1 - \left[P(x \leq 17) - P(x \leq 7)\right]$

$= 1 - 0{,}978 + 0{,}022 = 0{,}044$

β) $\beta\left(\frac{3}{10}\right) = P(H_0 / H_a) = P\left|7 < x < 18 / x \sim Bin(25, \frac{3}{10})\right|$

$= P(x \leq 17) - P(x \leq 7) = 0{,}488$

$\beta\left(\frac{6}{10}\right) = P(H_0 / H_a) = P\left|7 < x < 18 / x \sim Bin(25, \frac{6}{10})\right|$

$= P(x \leq 17) - P(x \leq 7) = 0{,}856$

γ)Αν το $x = 6$, απορρίπτεται η H_0 διότι είναι μικρότερο του 7

Πρόβλημα # 2:

Έστω $x_1, \ldots, x_n$ τυχαίο δείγμα από $N(\mu, \sigma^2)$ με σ^2 γνωστό .

Για τον έλεγχο $H_0 : \mu = \mu_0$ προς $H_a : \mu > \mu_0$, να δειχθεί ότι ο έλεγχος $\bar{x} \geq \mu_0 + 2{,}33 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ έχει επίπεδο σημαντικότητας α =0.01.

Λύση:

$$P\left(\bar{x} \geq \mu_0 + 2{,}33 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = P\left(\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \geq 2{,}33\right) = 1 - \Phi\left(2{,}33\right) = 1 - 0{,}9901 = 0{,}01 = \alpha$$

Πρόβλημα # 3:

Το μέσο σημείο βρασμού για κάποιο υγρό εκτιμήθηκε ως $\bar{x} = 94{,}32$ από ένα δείγμα μεγέθους 16. Έστω ότι η κατανομή είναι κανονική με $\sigma = 1{,}2$

α) Να ελεγχθεί $H_0 : \mu = 95$ προς $H_a : \mu \neq 95$ σε επίπεδο σημαντικότητας $\alpha = 0{,}01$

β) Να βρεθεί το σφάλμα τύπου ΙΙ όταν $\mu = 94$

γ)Να δοθεί ένα 95% διάστημα εμπιστοσύνης για το μ .

Λύση:

α) $Z = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \dfrac{94{,}32 - 95}{1{,}2/4} = -2{,}26$

Απορρίπτω την H_0 όταν $Z \leq -z_{\alpha/2}$ ή $Z \geq z_{\alpha/2}$

$\alpha = 0{,}01 \Rightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0{,}005$ $\qquad z_{0{,}005} = 2{,}58$

$-2{,}26 > -2{,}58 \Rightarrow$ H_0 δεν απορρίπτεται.

β) $\mu = 94$

$P(H_0 / H_a)$

Αποδέχομαι την H_0 όταν: $-z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \leq z_{\frac{\alpha}{2}}$

$\Rightarrow \mu_0 - z_{\frac{\alpha}{2}} . \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \bar{\chi} \leq \mu_0 + z_{\frac{\alpha}{2}} . \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$\Rightarrow 95 - 0{,}774 \leq \bar{\chi} \leq 95 + 0{,}774$

$\Rightarrow P[94{,}226 \leq \bar{x} \leq 95{,}674 / H_a]$

$\Rightarrow P\left(\dfrac{94{,}226 - 94}{0{,}3} \leq Z \leq \dfrac{95{,}774 - 94}{0{,}3}\right)$

$\Rightarrow P(0{,}75 \leq Z \leq 5{,}91) = \Phi(5{,}91) - \Phi(0{,}75) = 1 - \Phi(0{,}75) = 1 - 0{,}7734 = 0{,}2266$

γ) 95% Δ.Ε. για το μ

$\alpha = 0{,}05$

$\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} . \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} . \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$\Rightarrow 94{,}32 - 1{,}96.0{,}3 \leq \mu \leq 94{,}32 + 1{,}96.0{,}3$

95% Δ.Ε. για το μ

$\alpha = 0{,}05$

95% Δ.Ε. (93.732,94.908)

Πρόβλημα # 4:

Έστω δείγμα $n = 40$ οδομέτρων τα οποία έχουν κατασκευαστεί έτσι ώστε να καταγράφουν ακριβώς την ταχύτητα 55 χλμ/ώρα.
Υπολογίστηκε ότι $\bar{x} = 53{,}8$ και $S = 1{,}3$.
Να ελεγχθεί η υπόθεση $H_0 : \mu = 55$ προς $H_a : \mu \neq 55$ σε $a = 0{,}01$.
Επίσης να δοθεί ένα 99% Δ.Ε. για το μ.

Λύση:

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} = \frac{53{,}8 - 55}{1{,}3/\sqrt{40}} = -5{,}83$$

Απορρίπτω την H_0 όταν $Z \leq -z_{\frac{\alpha}{2}}$ ή $Z \geq z_{\frac{\alpha}{2}}$

-5,83<-2,58 $\Rightarrow$ απορρίπτω την H_0

99% Δ.Ε. για το $\mu \Rightarrow a = 0{,}01$ $\qquad \frac{a}{2} = 0{,}005$

$$\bar{x} - z_{0,005} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} = z_{0,005} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$$

99% Δ.Ε. για το μ είναι (53.27,54.33)
{απορρίπτεται η H_0}.