ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟΥ #3

1. Ένας ερευνητής μελετά την επιρροή της θερμοκρασίας πίεσης και τον τύπο του καταλύτη σε κάποιο αποτέλεσμα χημικής διαδικασίας. Έστω ότι έχει 3 θερμοκρασίες, 4 διαφορετικές πιέσεις και 5 καταλύτες.
α) Αν ένα πείραμα απαιτεί την χρησιμοποίηση θερμοκρασία πίεσης και καταλύτη, τότε πόσα τέτοια πείραματα υπάρχουν;
β) Πόσα πείραματα υπάρχουν αν χρησιμοποιηθεί η χαμηλότερη θερμοκρασία και οι δύο χαμηλότερες πιέσεις;
γ) Έστω ότι την πρώτη ημέρα πρέπει να γίνουν 5 διαφορετικα πειράματα. Ποια είναι η πιθανότητα ότι διαφορετικός καταλύτης έχει χρησιμοποιηθεί σε κάθε πείραμα;

ΛΥΣΗ

α) $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$
β) $1 \cdot 2 \cdot 5 = 10$
γ) Με κάθε καταλύτη κάνω 12 πειράματα. Άρα έχω 5 ομάδες πειραμάτων με διαφορετικό καταλύτη. Δηλαδή έχω:

$$\frac{\binom{12}{1}\binom{12}{1}\binom{12}{1}\binom{12}{1}\binom{12}{1}}{\binom{60}{5}} = \frac{12^5}{\binom{60}{5}} = 0{,}045$$

2. Ένας καθηγητής μαθηματικών διδάσκει πρωί και απόγευμα.Έστω A={ κακή πρωινή παράδοση} και B={κακή απογευματινή παράδοση}.
Έστω $P(A)=0.3$, $P(B)=0.2$ και $P(B\cap A)=0.1$
Να υπολογιστούν :
α) $P(B|A)$
β) $P(\overline{B}|A)$
γ) $P(B|\bar{A})$
δ) $P(\overline{B}|\bar{A})$

ΛΥΣΗ

α) $P(B|A) = P(B\cap A)/P(A) = 0.1/0.3 = 1/3$
β) $P(\overline{B}|A) = P(\overline{B}\cap A)/P(A) = P(A)-P(A\cap B)/P(A) = 2/3$
γ) $P(B|\bar{A}) = P(B\cap\bar{A})/P(\bar{A}) = P(A\cup B)-P(A)/1-P(A) = P(B)-P(A\cap B)/1-P(A) = 1/7$
δ) $P(\overline{B}|\bar{A}) = P(\overline{B}\cap\bar{A})/P(\bar{A}) = P(\overline{B\cup A})/P(A) = 1-P(A\cup B)/P(\bar{A}) = 6/7$

3. Στη ρουλέτα υπάρχουν 38 δυνατά αποτελέσματα 18 κόκκινα, 18 μαύρα και 2 πράσινα. Αν γυρίσουμε τον τροχό 2 φορές τότε όλα τα δυνατά αποτελέσματα είναι ισοπίθανα (38)(38). Να βρεθεί η πιθανότητα εμφάνισης 2 πράσινων σε 2 γυρίσματα της ρουλέτας δοθέντως ότι τουλάχιστον ένα είναι πράσινο.

ΛΥΣΗ

$P(\Pi_1 \cap \Pi_2 | \Pi_1 \cup \Pi_2) = P(\Pi1 \cap \Pi2)/1\text{-}P(\text{κανένα πράσινο}) = (2/38 \cdot 2/38)/1\text{-}(36/38 \cdot 36/38) = (1/19)^2/1\text{-}(18/19)^2 = 1/37 = 0.03$

4. Ένα κουτί περιέχει 6 κόκκινες μπάλες και 4 πράσινες · ένα άλλο κουτί έχει 7 κόκκινες μπάλες και 3 πράσινες. Παίρνουμε τυχαία μια μπάλα από το πρώτο κουτί και την τοποθετούμε στο δεύτερο. Εν συνεχεία τοποθετώ μια μπάλα από το δεύτερο κουτί στο πρώτο κουτί, πάλι με τυχαίο.

α) Ποια είναι η πιθανότητα να διαλέξω κόκκινη μπάλα και από τα 2 κουτιά.

β) Στο τέλος του πειράματος ποια είναι η πιθανότητα να έχουμε τον ίδιο αριθμό για τις κόκκινες και πράσινες μπάλες και στα δυο κουτιά με το αρχικό;

ΛΥΣΗ

Έστω K_i=κουτιά με κόκκινες μπάλες και Π_i=κουτιά με πράσινες μπάλες, με i=1,2

α) $P(K_1 \cap K_2) = P(K_2 | K_1) \cdot P(K_1) = 8/11 \cdot 6/10 = 48/110$

β) $P(\text{ ίδιος αριθμός}) = P[(K_1 \cap K_2) \cup (\Pi_1 \cap \Pi_2)] = P(K_1 \cap K_2) + P(\Pi_1 \cap \Pi_2) = 48/110 + P(\Pi_1) \cdot P(\Pi_2 | \Pi_1) = 48/110 + (4/10) \cdot (4/11) = 32/55$

5. Ένας διευθυντής έχει πρωινές και απογευματινές συναντήσεις. Έστω A={αργεί το πρωί} και B={αργεί το απόγευμα}.

α) Αν P(A)=0.4, P(B)=0.5 και $P(A \cap B)$=0.25 τα A,B είναι ανεξάρτητα;

β) Έστω ότι τα A,B είναι ανεξάρτητα με P(A)=0.4 και P(B)=0.5. Ποια είναι η πιθανότητα ότι ο διευθυντής θα είναι στην ώρα του και το πρωί και το απόγευμα;

γ) Ποια είναι η πιθανότητα ότι θα είναι στην ώρα του σε ακριβώς μια συνάρτηση;

ΛΥΣΗ

α) Για να είναι τα A,B ανεξάρητα αρκεί να δείχτεί ότι P(A|B)=P(A) ή $P(A \cap B)=P(A) \cdot P(B)$

Για το πρώτο έχουμε: $P(A|B)=P(A \cap B)/ P(B)=0.25/0.5=0.5 \neq P(A)=0.4$

Για το δεύτερο έχουμε: $P(A \cap B)=0.25 \neq P(A) \cdot P(B)=0.2$

Άρα τα A,B δεν είναι ανεξάρτητα.

β) $P(\bar{A} \cap \bar{B})=P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B})=(1-0.4) \cdot (1-0.5)=0.3$ διότι αν A,B ανεξάρτητα τότε και $\bar{A}$, $\bar{B}$ ανεξάρτητα

γ) $P(\text{στην ώρα του σε ακριβώς μία συνάντηση})=P(\bar{A} \cap B \text{ ή } A \cap \bar{B})=P(\bar{A}) \cdot P(B)+P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) =(0.6) \cdot (0.5)+(0.4) \cdot (0.5)=0.5$