

Εργαστήριο #6:

Άσκηση 1:

Ένας διευθυντής προσωπικού έχει συνεντεύξεις με 11 μηχανικούς για μια θέση εργασίας. Έχει υποθέσει ότι θα κάνει 6 συνεντεύξεις την πρώτη ημέρα και 5 την δεύτερη.

- α) Ποιά η πιθανότητα ότι x απο τους 4 καλύτερους υποψήφιους δίνει συνέντευξη την πρώτη ημέρα;
β) Πόσοι απο τους 4 καλύτερους υποψήφιους αναμένεται να δώσουν συνέντευξη την πρώτη ημέρα;

Λύση:

$$\alpha) P(X = x) = \frac{\binom{6}{x} \binom{5}{4-x}}{\binom{11}{4}}$$

$$n = 4, N = 11, m = 6$$

$$\beta) E(x) = n \cdot \frac{m}{N} = 4 \cdot \frac{6}{11} = 2.18$$

Άσκηση 2:

Ένας προπονητής ποδοσφαίρου έχει 25 μπάλες εκ των οποίων οι 15 είναι Α και οι άλλες 10 είναι Β. 4 παίκτες διαλέγουν 3 μπάλες ο καθένας και x = αριθμός των Α.

- α) $P(x = 8) =$;
β) E_x και $Var x$;
γ) Ποιά η πιθανότητα ο αριθμός των Α ο οποίος διαλέχτηκε να είναι μεταξύ μιας τυπικής απόκλισης απο τη μέση του τιμή;
δ) Ποιά η μέση τιμή και ποιά η διακύμανση για τον αριθμό των Α που έμειναν;

Λύση:

α)

$$P(x = 8) = \frac{\binom{15}{8} \binom{10}{12-8}}{\binom{25}{12}} = 0.087$$

β)

$$E(x) = 12 \frac{15}{25} = 7.2$$

$$Varx = \frac{N-n}{N-1} n \frac{m}{N} \left(1 - \frac{m}{N}\right) = 12 \frac{15}{25} \frac{10}{25} \frac{13}{24} = 1.56$$

γ)

$$P(|X - E(X)| \leq \sqrt{Var(X)}) = P(E(X) - \sqrt{Var(X)} \leq X \leq E(X) + \sqrt{Var(X)}) = \\ P(7.2 - 1.25 \leq X \leq 7.2 + 1.25) = P(5.95 \leq X \leq 8.45) = P(6 \leq X \leq 8)$$

$$P(6 \leq x \leq 8) = P(x=6) + P(x=7) + P(x=8) = \frac{\binom{15}{6} \binom{10}{6} + \binom{15}{7} \binom{10}{5} + \binom{15}{8} \binom{10}{4}}{\binom{25}{12}}$$

δ)

$$\psi = 15 - x$$

$$E(\psi) = E(15 - x) = 15 - E(x) = 15 - 7.2 = 7.8$$

$$Var(\psi) = Var(15 - x) = Varx = 1.56$$

Άσκηση 3:

Έστω χ = αριθμός φυσικών καταστροφών / 2 χρόνια
 $x \sim p(\lambda=8)$

α) $P(x \leq 5)$

β) $P(6 \leq x \leq 9)$

γ) $P(x \geq 10)$

δ) $P(1 \leq x \leq 4)$ για 1 χρόνο

Λύση:

α)

$$P(x \leq 5) = \sum_{x=0}^5 \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^x}{x!} = \sum_{x=0}^5 \frac{e^{-8} \cdot 8^x}{x!}$$

β)

$$P(6 \leq x \leq 9) = \sum_{x=6}^9 \frac{e^{-8} \cdot 8^x}{x!}$$

γ)

$$P(x \geq 10) = 1 - P(x \leq 9) = 1 - \sum_{x=0}^9 \frac{e^{-8} \cdot 8^x}{x!}$$

δ)

$$\lambda = 4$$

$$P(1 \leq x \leq 4) = \sum_{x=2}^4 \frac{e^{-4} \cdot 4^x}{x!}$$

Άσκηση 4:

Έστω x τυχαία μεταβλητή με

$$P(x) = \begin{cases} kx^2 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{αλλοιώς} \end{cases}$$

α) Να βρεθεί η σταθερά k

β) Να υπολογιστεί $P(x \leq \frac{1}{2})$

γ) $P(\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{4})$

δ) $P(x \geq \frac{9}{10})$

Λύση:

α)

$$\int_0^1 kx^2 dx = 1 \Rightarrow \frac{kx^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{k}{3} = 1 \Rightarrow k = 3$$

β)

$$P(x \leq \frac{1}{2}) = \int_0^{\frac{1}{2}} 3x^2 dx = \frac{1}{8}$$

γ)

$$P(\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{4}) = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} 3x^2 dx = (\frac{3}{4})^3 - (\frac{1}{4})^3 = \frac{7}{16}$$

δ)

$$P(x \geq \frac{9}{10}) = \int_{\frac{9}{10}}^1 3x^2 dx = 1 - \left(\frac{9}{10}\right)^3 = 0.2$$

Άσκηση 5:

Δίνεται παρακάτω η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(\psi) = \begin{cases} \frac{1}{25}\psi & 0 \leq \psi < 5 \\ \frac{2}{5} - \frac{1}{25}\psi & 5 \leq \psi \leq 10 \\ 0 & \psi < 0, \psi \geq 10 \end{cases}$$

α) Να δώσετε το γράφημα της $f(\psi)$

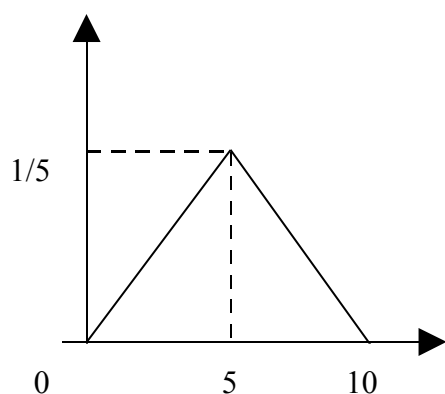
β) Ναδειχτεί ότι είναι συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας.

γ) $P(\psi \leq 3)$

δ) $P(2 \leq \psi \leq 6)$

Λύση:

α)



β)

$$\int_0^{10} f(\psi) d\psi = \int_0^5 \frac{1}{25} \psi d\psi + \int_5^{10} \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{25} \psi \right) d\psi = \frac{\psi^2}{50} \Big|_0^5 + \left[\frac{2\psi}{5} - \frac{\psi^2}{50} \right]_5^{10} = 1$$

γ)

$$P(\psi \leq 3) = \int_0^3 \frac{1}{25} \psi d\psi = \frac{9}{50}$$

δ)

$$P(2 \leq \psi \leq 6) = \int_2^6 f(\psi) d\psi = \int_2^5 \frac{\psi}{25} d\psi + \int_5^6 \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{25} \psi \right) d\psi = \frac{3}{5}$$

Άσκηση 6:

Για την παρακάτω συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x) = 2(1-x), 0 \leq x \leq 1$ να βρεθεί η αθροιστική συνάρτηση κατανομής και να δοθεί το γράφημα της.

Λύση:

$$f(x) = 2(1-x), 0 \leq x \leq 1$$

$$F(x) = \int_0^x 2(1-\psi) d\psi = 2x - x^2$$

