ΔΙΑΛΕΞΗ 11

Ορισμός
Μια τυχαία μεταβλητή ονομάζεται συνεχής αν το σύνολο των τιμών της είναι ένα διάστημα της πραγματικής ευθείας.

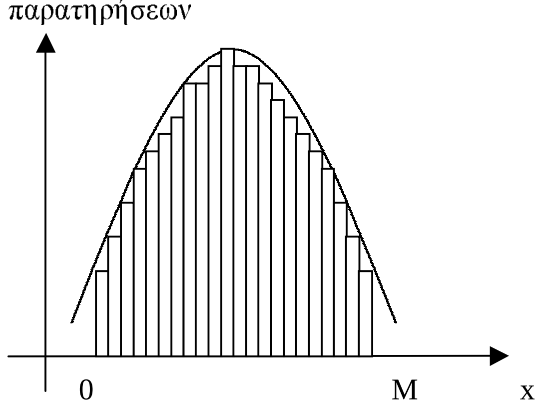
Π.χ. (1) x = βάθος λίμνης
A = ελάχιστο βάθος
B = μέγιστο βάθος
$x \in [A,B]$

(2) X = πόσο pH το οποίο περιέχεται σε κάποια αντίδραση
$X \in [0,14]$

Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας

Δες παράδειγμα A = 0 B = M

\# παρατηρήσεων



Έστω x συνεχής τυχαία μεταβλητή (σ.τ.μ). Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας είναι η f(x) έτσι ώστε για κάθε α και b :

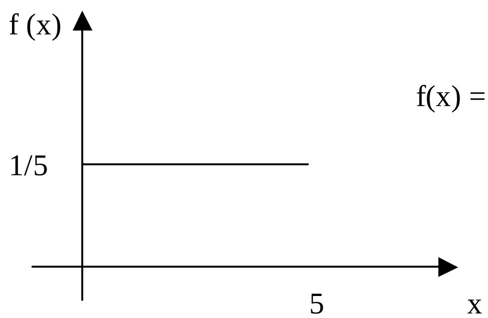
$$P\ (\alpha \leq x \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

Η f(x) ικανοποιεί :
(1) $f(x) \geq 0$ για κάθε x
(2) $\int f(x)\, dx = 1$

<u>Παράδειγμα 1</u>

Έστω ότι παίρνω λεωφορείο κι αυτό αναχωρεί κάθε 5 λεπτά

x = ώρα αναμονής $X \in [0,5]$



$f(x) = c \quad x \in [0,5]$

P (αναμονής μεταξύ 3 και 5 λεπτών) = $P(3 \leq x \leq 5) = \int_3^5 \frac{1}{5} dx = \frac{x}{5} \Big|_3^5 = 2/5$

$P(1 \leq x \leq 4) = \int_1^4 1/5 dx = \frac{x}{5} \Big|_1^4 = 3/5$

$P(x = 1) = 0$

$P(x < x \leq 4) = P(1 < x < 4) = P(1 \leq x < 4) = P(1 \leq x \leq 4)$
$\{1 \leq x \leq 4\} = \{1 < x \leq 4\} \cup \{x = 1\}$

Γενικά αν x συνεχής τυχαία μεταβλητή:

(1) $P(x = c) = 0$

(2) $P(\alpha \leq x \leq b) = P(\alpha < x < b)$
$= P(\alpha \leq x < b)$
$= P(\alpha < x \leq b)$

Παράδειγμα 2^{o}

X = ώρα δανεισμού ενός βιβλίου

$$f(x) = \begin{cases} X/2 & 0 \le x \le 2 \\ 0 & \text{αλλοιώς} \end{cases}$$

(α) $P(x < 1) = \int_0^1 \frac{1}{2} x dx = \frac{x^2}{4} \Big|_0^1 = \frac{1}{4}$

(b) $P(1/2 \le x \le 3/2) = \int_{1/2}^{3/2} \frac{x}{2} dx = \frac{x^2}{4} \Big|_{1/2}^{3/4} = \frac{1}{2}$

(c) $P(x > 1.5) = \int_{3/2}^{2} \frac{x}{2} dx = \int_{3/2}^{2} \frac{1}{2} x\, dx = \frac{x^2}{4} \Big|_{3/2}^{2} = \frac{7}{16}$

Παράδειγμα 3:

$$X = \text{τ.μ} \quad \text{με } f(x) = \begin{cases} kx & 1 \le x \le 4 \\ 0 & \text{αλλοιώς} \end{cases}$$

Για να βρω το κ $\int_{\Re} f(x)dx = 1 = \frac{1}{7}$

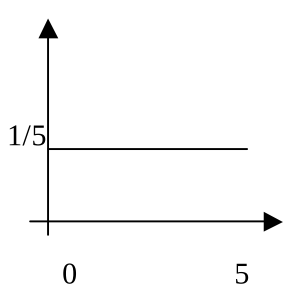
$$\Rightarrow \int_1^4 kxdx = 1 \rightarrow \left(\int_1^4 xdx\right) = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{\int_1^4 xdx} = 2/15$$

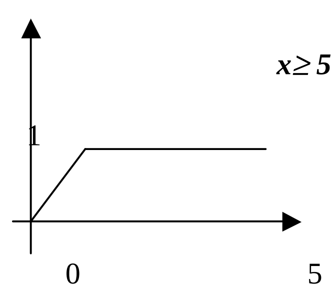
Αθροιστική Συνάρτηση Κατάνομης

$F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy$

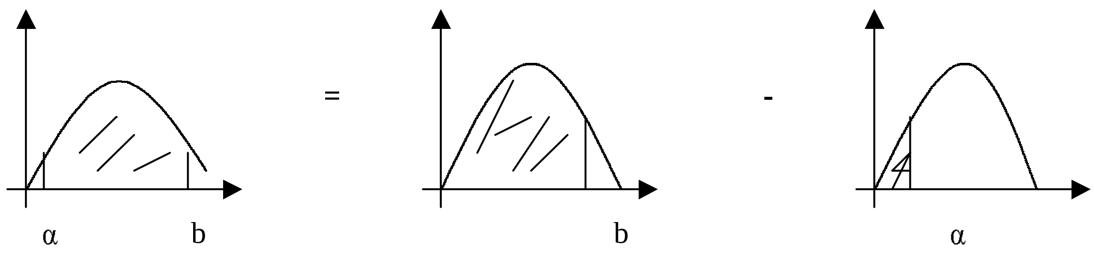
$f(x) = \frac{1}{5} \quad 0 \le x \le 5$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{5} dy = \int_0^x \frac{1}{5} dy = \frac{y}{5}\Big|_0^x = x/5 \quad 0 \le x \le 5$$





ΙΣΧΥΕΙ: **_P (α ≤ x ≤ b) = F (b) – F(α)**



<u>Άσκηση</u>

‘Εστω Χ τ.μ $f(x) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8}x \qquad 0 \le x \le 2$

Η αθροιστική συνάρτηση κατανομής δίνεται από:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ \int_0^x \left(\frac{1}{8} + \frac{3}{8}y\right) dy = \frac{x}{8} + \frac{3}{16}x^2 & 0 \le x < 2 \\ 1 & x \ge 2 \end{cases}$$

$P(1 \le x \le 1.5) = F(1.5) - F(1) = .297$

$P(x > 1) = 1 - P(x \le 1) = 1 - F(1) = .628$