ΔΙΑΛΕΞΗ 12

Για να περιγράψω την τυχαία μεταβλητή Χ $\quad P(\alpha \le x \le b) = \int_a^b f(x)dx$

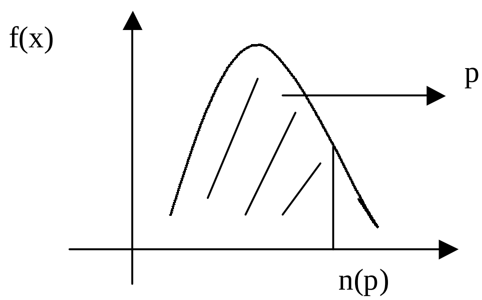
Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής

$F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy$

Θεώρημα:
Αν Χ είναι σ.τ.μ. με σ.π.π f(x) και α.σ.κ F(x), τότε F΄(x) = f(x) για κάθε σημείο x στο οποίο η F΄υπάρχει.

Ποσοστημόριο
Λέμε ότι τα αποτελέσματα ενός φοιτητή είναι στο 85^o ποσοστημόριο, καταλαβαίνουμε ότι 85% πληθυσμού έχει αποτελέσματα πιο χαμηλά, ενώ το υπόλοιπο 15% έχει ψηλότερο.

Ορισμός:
Έστω p∈(0 , 1). Το (100p) ποσοστημόριο της Χ είναι εκείνο το σημείο n(p) για το οποίο η $p = p(x \le n(p))$



Παράδειγμα

$$X \sim f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}(1-x^2) & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{αλλοιώς} \end{cases}$$

p = 50/100 = ½ $\quad$ Θέλω να βρω το σημείο n έτσι ώστε $½ = p(x \le n) = F(n)$

Η αθροιστική συνάρτηση κατανομής

$F(x) = \int_0^x \frac{3}{2}(1- y^2)dy = \frac{3}{2}(x - \frac{x^3}{3}) \qquad 0 \le x \le 1$

$\frac{1}{2} = F(n) = \frac{3}{2}(n - \frac{n^3}{3}) \to n = .347$

Μέση Τιμή

$x \sim f(x); \quad \mu = E(x) = \int x f(x) dx$

Για το προηγούμενο παράδειγμα

$E(x) = \int_0^1 x \frac{3}{2} (1 - x^2)dx = 3/2 \int_0^1 (x - x^3)dx = \frac{3}{2} \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right|_0^1 = 3/8$

Μπορώ να ορίσω $E[h(x)] = \int h(x) f(x) dx$

Επίσης ισχυεί $E(\alpha X + b) = \alpha E(x) + b$

<u>Διακύμανση συνεχούς τυχαίας μεταβλητής</u>

$VarX = \sigma^2 = \int (x - \mu)^2 f(x)dx$

Τυπική απόκλιση $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$

Ισχύει πάλι : $Var(x) = E(x^2) - E^2(x)$

$Var(\alpha X + b) = \alpha^2 VarX$

Για το προηγούμενο παράδειγμα:

$Varx = ? \quad \Rightarrow \quad Var(x) = \frac{1}{5} - (\frac{3}{8})^2 = 19/320 \qquad \sigma = \sqrt{\frac{19}{320}}$

$E(x^2) = \int_0^1 \frac{3}{2} x^2 (1 - x^2)dx = \frac{3}{2} \int_0^1 (x^2 - x^4)dx = 1/5$

Άσκηση 1

Έστω X θερμοκρασία σε $°c$
και έστω Y σε $°F$

Y = 1,8x + 32

(1) Αν $\tilde{\mu}$ είναι η διάμεσος της X , τότε η διάμεσος της Y είναι 1,8 $\tilde{\mu}$ +32

P (Y ≤ $1,8\,\tilde{\mu} + 32$)

(2) Πως συνδέεται το 90° ποσοστημόριο της Y με το 90° ποσοστημόριο της X

Έστω το 90° ποσοστημόριο της X η_x : n_y = 1,8 η_x +32
90° ποσοστημόριο της Y n_y

P (Y≤ η_y) = P (1,8x + 32 ≤ 1,8n_x +32) = 90/100

Άσκηση 2

Ώρα αντίδρασης σε κάποιο φάρμακο δίνεται από την X ~ f(x) = $\frac{3}{2x^2}$, 1 ≤ x ≤ 3

(1) Αθροιστική συνάρτηση κατανομής της X

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ \int_1^x \frac{3}{2y^2}\,dy = - \frac{3}{2y}\Big|_1^x = 3/2\,(1 - 1/x) & 1 \le x \le 3 \\ 1 & x > 3 \end{cases}$$

(2) P (ώρα αντίδρασης το πολύ 5/2) = P (x ≤ 5/2)

$= F(5/2) = 3/2\,(1 - \frac{1}{\frac{5}{2}}) = 9/10$

$P(3/2 \le x \le 5/2) = F(5/2) - F(3/2) = 9/10 - 1/2 = 2/5$

(3) $Ex = \int_1^3 x \frac{3}{2x^2} dx = \frac{3}{2} \int_1^3 \frac{dx}{x} = \frac{3}{2} \log x \Big|_1^3 = 3/2 \log 3$

(4) $\sigma = ?$

$\sigma^2 = E(x^2) - E^2(x) = \int_1^3 x^2 \frac{3}{2x^2} dx - (3/2 \log 3)^3 = 3 - (3/2 \log 3)^2 = .284$

Συνεπώς $\sigma = \sqrt{.284} = .533$

Άσκηση 3

Χ θερμοκρασία για κάποια χημική αντίδραση

$f(x) = 1/9\,(4 - x^2) \qquad -1 \le x \le 2$

(α) αθροιστική συνάρτηση κατανομής της Χ

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < -1 \\ \int_{-1}^{x} \frac{1}{9}(4 - y^2)dy = \frac{1}{9} x \left(4 - \frac{x^2}{3}\right) + \frac{11}{27} & -1 \le x \le 2 \\ 1 & x > 2 \end{cases}$$

(β) Είναι το 0 διάμεσος ;

$F(0) = 11/27 \neq ½ \Rightarrow 0$ όχι διάμεσος

Η διάμεσος > 0

(γ) Η χημική αντίδραση γίνεται ξεχωριστά σε 10 εργαστήρια. Έστω X αριθμός εργοστασίων η θερμοκρασία του 1

Τότε η κατανομή της $Y \sim Bin\left(n = 10,\ p = p(x>1)\right)$

Αλλά $p = P(x > 1) = 1 - F(1) = 5/27$