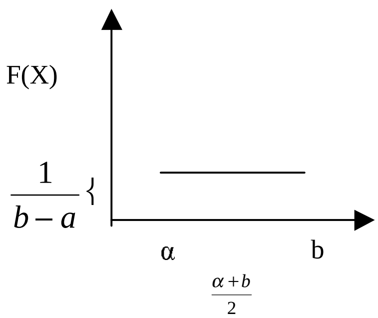
<u>ΔΙΑΛΕΞΗ 13</u>

Έστω x συνεχής τυχαία μεταβλητή.
Λέμε ότι η x ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή, (x~(α,b)) στο (α,b) αν η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας f(x)= $\frac{1}{b-a}$, α≤x≤b



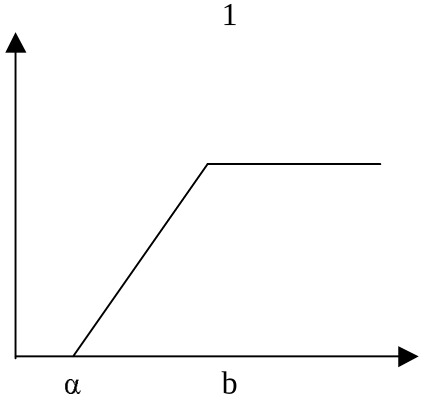
Για παράδειγμα, αν α=1, b=12⇒f(x)= $\frac{1}{11}$, 1≤x≤12

$$EX=\int_a^b x\,\frac{1}{(b-\alpha)}\,dx=\frac{1}{b-a}\left[\frac{x^2}{2}\right]_\alpha^b=\frac{b^2-a^2}{2(b-\alpha)}=\frac{\alpha+b}{2}$$

$$Var(x)=EX^2-E^2X=\int_a^b x^2\left(\frac{1}{b-\alpha}\right)dx-\left(\frac{\alpha+b}{2}\right)^2=\frac{1}{b-\alpha}\left[\frac{x^3}{3}\right]_a^b-\left(\frac{\alpha+b}{2}\right)^2=\frac{(b-\alpha)^2}{12}$$

Η α.σ.κ. της x

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x<\alpha \\ \int_\alpha^x \frac{1}{b-a}\,dy=\frac{x-\alpha}{b-a}, & \alpha\le x\le b \\ 1 & x>b \end{cases}$$



(1)X~U (1,4)

EX=$\frac{1+4}{2}$, **VarX**=$\frac{(4-1)^2}{12}=\frac{3}{4}$ $\frac{(4-1)^2}{12}=\frac{3}{4}$

Θα υπολογίσουμε το 80ο ποσοστημόριο (η80)

$\frac{80}{100}$=P(X≤η(80)) $\Leftrightarrow \frac{\eta(80)-1}{4-1}$=0.8⇔η(80)=3.4

Η διάμεσος: $\frac{\eta(50)-1}{4-1}=\frac{1}{2}$ ⇔η(50)=$\frac{5}{2}$

(2)Λεωφορεία περνάνε από στάση κάθε 15 λεπτά, αρχίζοντας από τις 8:00. Ο χρόνος άφιξής μου στη στάση ακολουθεί την ομοιόμορφη μεταξύ 8:00 και 8:30.

X=χρόνος άφιξής f(x)=$\frac{1}{30}$, 0≤x≤30

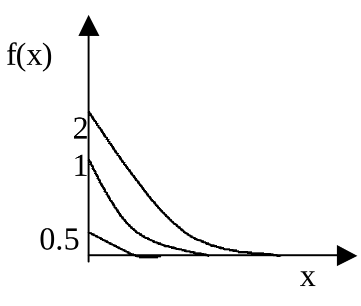
P(περιμένω το πολύ 5 λεπτά)=P(10≤x≤15 ή 25≤x≤30)

=P(10≤x≤15) + (25≤x≤30)=$\int_{10}^{15}\frac{1}{30}dx+\int_{25}^{30}\frac{1}{30}dx=\frac{1}{3}$

P(περιμένω τουλάχιστον 10 λεπτά)=P(0<x≤5 ή 15<x≤20)=$\frac{1}{3}$

Εκθετική τυχαία μεταβλητή

Η τ.μ. x ονομάζεται η σ.π.π και δίνεται από f(x)=λε$^{-\lambda\chi}$, x ≥ 0, λ>0



E(X)=$\frac{1}{\lambda}$

$$\int_0^{+\infty} x\lambda e^{-\lambda x}dx = -\int_0^{+\infty} x de^{-\lambda x} = [-xe^{-\lambda x}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}dx = [-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}]_0^{+\infty} = \frac{1}{\lambda}$$

VarX=$\frac{1}{\lambda^2}$

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ 1-e^{-ëx} & x\geq 0 \end{cases}$$

<u>Παράδειγμα 1:</u> X=χρόνος διαδοχικών αφίξεων στο ταμείο, $X \sim Exp(\lambda=1)$

(α) $EX=1$

(b) $\sigma=\sqrt{Varx}=1$

(c) $P(x\leq 4)=F(4)=1-e^{-4}$

(d) $P(2\leq x\leq 5)=F(5)-F(2)=(1-e^{-5})-(1-e^{-2})=e^{-2}-e^{-5}$

<u>Παράδειγμα 2:</u> X=χρόνος που κάνει κάποιος βιβλιοθηκάριος για να ελέγξει κατά πόσο ένα βιβλίο είναι καταχωρημένο ακολουθεί την εκθετική με μέση τιμή 20 δευτερόλεπτα.

$20=EX=\frac{1}{\lambda}\Rightarrow\lambda=\frac{1}{20}$ $\quad f(x)=\frac{1}{20}e^{-\frac{1}{20}x}$, $x\geq 0$

(α) $P(x\leq 30)=1-e^{-\frac{1}{20}30}=1-e^{-\frac{3}{2}}$

(b) $P(x>20)=1-P(x\leq 20)=1-(1-e^{-\frac{1}{20}20})=e^{-1}$

(c) Η διάμεσος η(50)

$P(x\leq\eta(50))=\frac{1}{2}\Rightarrow 1-e^{-\frac{1}{20}\eta(50)}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow e^{\frac{1}{20}\eta(50)}=2\Rightarrow\frac{\eta(50)}{20}=\log 2\Rightarrow\eta(50)=20\log 2$