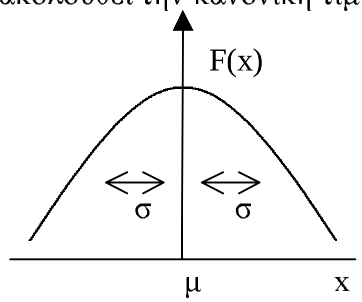
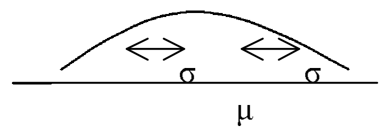
<u>ΔΙΑΛΕΞΗ 14</u>

Η x ακολουθεί την κανονική τιμή x~N(μ,σ^2) αν η σ.π.π. $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2\sigma}(x-\mu)^2}$ (*)

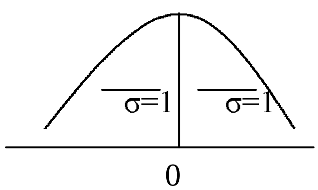




1. Συμμετρικό γύρω από το μ
2. Το μ είμαι η διάμεσος
3. Μεγάλες τιμές του σ δίνουν γραφήματα με μεγάλο εύρος τιμών, ενώ μικρές τιμές του σ δίνουν γραφήματα με μικρό εύρος τιμών.

Τυπική κανονική είναι μια κανονική τυχαία μεταβλητή με μ=0, $\sigma^2=1$.

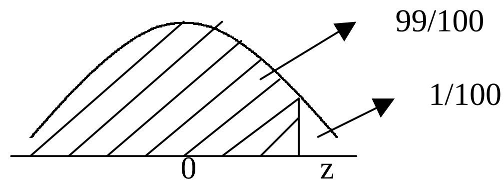
Τη συμβολίζουμε με Ζ. Δηλαδή, η σ.π.π. $f(Z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}z^2}$,όπου το z ανήκει στους πραγματικούς αριθμούς. (Προκύπτει από (*) με μ=0, $\sigma^2=1$)



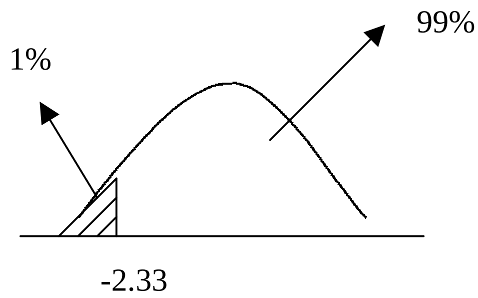
Η α.σ.κ. της τυπικής κανονικής συμβολίζεται με $\Phi(z)=P(Z\leq z)$

Να υπολογιστούν οι παρακάτω πιθανότητες:
(α)$P(Z\leq 1.25)=\Phi(1.25)=0.8944$
(β)$P(Z>1.25)=1-\Phi(1.25)=1-0.8944=0.1056$
(γ)$P(Z<-1.25)=P(Z>1.25)=0.1056$
(δ)$P(-0.38\leq Z\leq 1.25)=\Phi(1.25)-\Phi(-0.38)=0.8944-0.3520=0.5424$

Ο ίδιος πίνακας μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να βρούμε τα ποσοστημόρια της Ζ. Για παράδειγμα, αν θέλουμε το 99ο ποσοστημόριο, αναζητούμε εκείνο το z:$P(Z\leq z)=0.99$

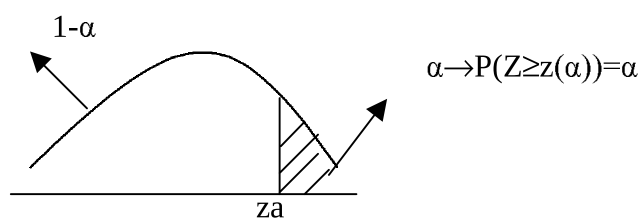


Από πίνακα z=2.33



Άρα το 1% της κατανομής είναι μικρότερο από το -2.33

<u>Ο συμβολισμός ζα:</u> Με το z(α) συμβολίζουμε εκείνο το σημείο για το οποίο υπάρχει πιθανότητα α δεξιά του.



<u>Τυπικές τιμές που χρειαζόμαστε</u>

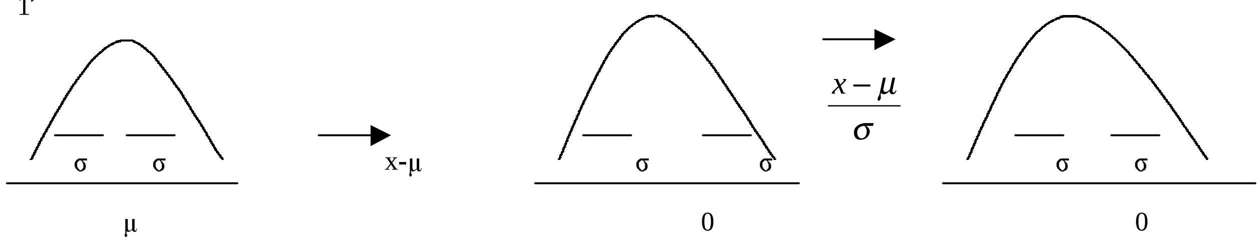
Ποσοστημόριο	90	95	97.5	99	99.5
α(πιθανότητα ουράς	0.10	0.05	0.25	0.01	0.005
Z(a)	1.28	1.64	1.96	3.33	2.58

<u>Πρόταση</u>:Αν x~N(μ,σ^2) $\rightarrow \frac{\chi-\mu}{\sigma}$~N(0,1)

Z=$\frac{x-\mu}{\sigma}$, E(Z)=$\frac{1}{\sigma}$E(x)-$\frac{\mu}{\sigma}$ ⇒EX =μ

Var(Z)=$\frac{1}{\sigma^2}$Varx=Varx=σ^2

1



Για παράδειγμα, x~N(μ=1.25 και σ=0.46)

P(1≤x≤1.75)=P(1-1.25≤x-1.25≤1.75-1.25)

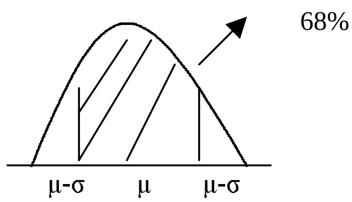
$$P\left(\frac{1-1.25}{0.46} \le \frac{x-1.25}{0.46} \le \frac{1.75-1.25}{0.46}\right)=P\left(-0.54 \le Z \le 1.09\right)=\Phi(1.09)-\Phi(-0.54)$$

$$=0.8621-0.2946=0.5675$$

$$P(x>2)=P\left(\frac{x-1.25}{0.46} > \frac{2-1.25}{0.46}\right)=P(Z>1.63)=1-\Phi(1.63)=0.0516$$

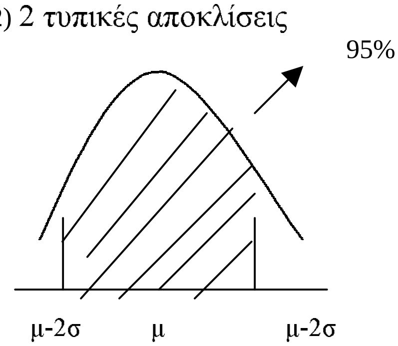
Κανικοποιίηση σημαίνει ότι υπολογίζω την απόσταση από την αναμενόμενη τιμή σε αριθμό τυπικών αποκλίσεων.

Άσκηση: $x \sim N(\mu, \sigma^2)$
Ποια η πιθανότητα οι τιμές x να βρίσκονται 1 τυπική απόκλιση από τη μέση τιμή



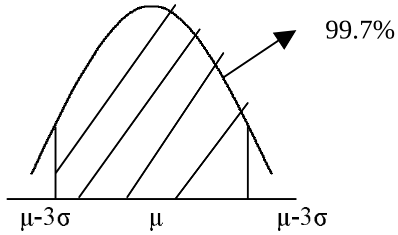
$P(\mu-\sigma \le x \le)=P(-\sigma \le x \le \sigma)=P(-1 \le z < 1)=\Phi(1)-\Phi(1)=0.6826$

(2) 2 τυπικές αποκλίσεις



$P(-2 \le z \le 2)=95\%$

(3) 3 τυπικές αποκλίσεις



$P(-3 \le z \le 3)=99.7\%$

Ποσοστημόριο

Έστω η(p) το ποσοστημόριο της x, x $\sim N(\mu, \sigma^2)$

$$P = P(x \leq \eta(p)) = P\left(\frac{x-\mu}{\sigma} \leq \frac{\eta(p)-\mu}{\sigma}\right)$$

$$= P\left(z \leq \frac{(\eta)p-\mu}{\sigma}\right)$$

(Ποσοστημόριο της x)-μ=(Ποσοστημόριο της z)

(Ποσοστημόριο της x)=μ+σ(Ποσοστημόριο της z)

<u>Παράδειγμα:</u>το ποσό νερού το οποίο αδειάζει μια μηχανή από ένα μεγάλο δοχείο N(μ=64,σ=0.78) για το οποίο υπερχείλιση θα παρατηρείται 0.5%

$P(x>c)=0.005 \Leftrightarrow P(x \leq c)=0.995$

Άρα το c είναι 99.5 ποσοστημόριο της x, όπου x~N με μ=64 και σ=0.78$\Rightarrow$c=64+0.78(2.58)=66