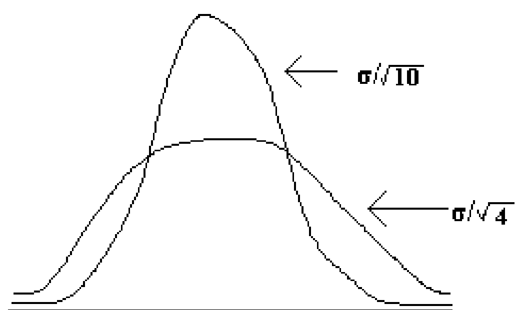
<u>Lecture 19</u>

Η ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΤΟΥ ΜΕΣΟΥ ΟΡΟΥ

Η περίπτωση του κανονικού πληθυσμού

<u>Θεώρημα:</u> Έστω $X_1,\ldots..X_n$ τυχαίο δείγμα από την κανονική κατανομή με μέση τιμή μ και τυπική απόκλιση σ. Τότε για κάθε n, $\overline{X}$ είναι μια κανονική τυχαία μεταβλητή με μέση τιμή μ και τυπική απόκλιση $\sigma/\sqrt{n}$



Συνεπώς μπορώ να υπολογίσω $P(\alpha \le \overline{X} \le \beta)$

<u>Π.χ.</u>)Η ώρα εξυπηρέτησης για κάποιο ταμείο ακολουθεί την κανονική με μ=1.5min και σ=0.35min. Έστω $X_1,\ldots,X_5$ ώρες εξυπηρέτησης 5 ταμείων. Ποια είναι η πιθανότητα η ολική ώρα $T = X_1 + \ldots + X_5$ να είναι μεταξύ 6 και 8 λεπτών.

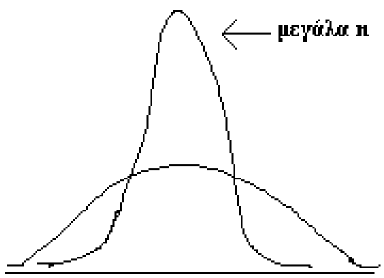
<u>Λύση:</u> $P(6 \le \overline{X} \le 8) = P(6/5 \le \overline{X} \le 8/5) = P(1.2 \le \overline{X} \le 1.6) = P\left(\frac{1.2-1.5}{0.35/\sqrt{5}} \le \overline{X} \le \frac{1.6-1.5}{0.35/\sqrt{5}} \right)$

$= P(-1.92 \le z \le 0.64) = \Phi(0.64) - \Phi(-1.92) = 0.7115$

Ποια είναι η $P(\overline{X} < 2) = P\left(\frac{\overline{X} - 1.5}{0.35/\sqrt{5}} < \frac{2.0 - 1.5}{0.35/\sqrt{5}} \right) = P(z<3.19) = \Phi(3.19) = .09993$

Το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα

<u>Θεώρημα:</u> Έστω $X_1,\ldots..X_n$ τυχαίο δείγμα από κατανομή με μέση τιμή μ και διακύμανση σ^2. Τότε όταν το n είναι μεγάλο, η κατανομή του $\overline{X}$ προσεγγίζει την κανονική με μέση τιμή μ και τυπική απόκλιση $\sigma/\sqrt{n}$.



Π.χ.) Το ποσό νικοτίνης για ένα τσιγάρο είναι τυχαία μεταβλητή με μέση τιμή μ=0.8mg και τυπική απόκλιση σ=0.1mg. Αν ο καπνιστής καπνίσει 5 πακέτα για μια εβδομάδα, ποια η πιθανότητα το ολικό ποσό νικοτίνης να είναι τουλάχιστον 0.82 mg ;

Λύση: $P(X_1+.....+X_{100} \geq 0.82) = P(\bar{X} \geq 0.82) = P\left(\frac{\bar{X} - 0.8}{1/\sqrt{100}} \geq \frac{0.82 - 0.8}{1/\sqrt{100}}\right) = P(z \geq 2) = 0.0228$

Π.χ.) Κάποιος οργανισμός για την προστασία του καταναλωτή καταγράφει τον αριθμό ελαττωματικών αυτοκινήτων κάθε χρόνο. Ο αριθμός ελαττωματικών αυτοκινήτων είναι τ.μ. με μ=3.2 και σ=2.4. Ανάμεσα σε 100 τυχαία επιλεγμένα αυτοκίνητα, ποια είναι η πιθανότητα ο μέσος όρος ανάμεσα σε 100 τυχαία επιλεγμένα ελαττωματικά αυτοκίνητα να είναι μεγαλύτερος του 4;

Λύση: $P(\bar{X} > 4) = P\left(z > \frac{4 - 3.2}{2.4/\sqrt{100}}\right) = P(z > 3.33) = 1 - \Phi(3.33) = 0.0004$

Αυτό είναι παράδειγμα διακριτών τυχαίων μεταβλητών που ο μέσος όρος του ακολουθεί συνεχή κατανομή.

Ειδικά για την διωνυμική:

Έστω X~Bin(n,p). Αν n είναι μεγάλο έτσι ώστε η κατανομή της X να μην λοξή, τότε η κατανομή της X προσεγγίζεται από την κανονική με μ= np και $\sigma^2 = \sqrt{np(1-p)}$.

Άρα $P(X \leq x) \approx$ (εμβαδόν της κανονικής στα αριστερά του x+0.5)$=\Phi\left(\frac{x + 0.5 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$

Εφαρμόζουμε την προσέγγιση αν **np≥5** και **n(1-p)≥5**

Π.χ.) ρ=1/4 και n=50. Τότε np=12.5 και σ= $\sqrt{50\ 1/4\ \ 3/4}$ =3.06

Επειδή np=12.5≥5 και n(1-p)=37.5≥5 έχω:

$P(x \leq 10) = \Phi\left(\frac{10+0.5-12.5}{3.06}\right) = \Phi(-0.65) = 0.2578$

$P(5 \leq x \leq 15) = P(x \leq 15) - P(x \leq 4) = \Phi\left(\frac{15+0.5-12.5}{3.06}\right) - \Phi\left(\frac{4+0.5-12.5}{3.06}\right) = 0.8320$