Διάλεξη # 2

Πιθανότητα

Ο σκοπός του ορισμού της πιθανότητας είναι να αντιστοιχίσει κάθε ενδεχόμενο $A \subseteq S$ ένα αριθμό $P(A)$, ο οποίος ονομάζεται πιθανότητα του A και δηλώνει πόσο πιθανό είναι να συμβεί αυτό το ενδεχόμενο.

Αξιώματα

1. $0 \le P(A) \le 1$, $A \subseteq S$
2. Αν A_1, A_2, A_3 ... άπειρη συλλογή ενδεχομένων, ξένα ανά δύο τότε:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Αν τουλάχιστον ένα από τα ενδεχόμενα συμβεί και κάθε δύο ενδεχόμενα δεν γίνεται να παρατηρηθούν μαζί τότε:
P(τουλάχιστον ένα)=άθροισμα των πιθανοτήτων των ενδεχομένων.

Παράδειγμα: Ρίψη νομίσματος, $S=\{K,\Gamma\}$

Από το αξίωμα 1 $\Rightarrow P(S)=1$. Όμως $S=K\cup\Gamma$ και από το 2^{o} αξίωμα έχουμε:
$P(S)=P(K)+P(\Gamma) \Rightarrow P(K)=1-P(\Gamma)$
Αν $P(\Gamma)=½ \Rightarrow P(K)=½$
Αν $P(\Gamma)=¾ \Rightarrow P(K)=¼$
Αν $P(\Gamma)=\rho \Rightarrow P(K)=1-\rho \qquad \rho\in[0,1]$

Γενικά για να υπολογίσω την πιθανότητα του Α:

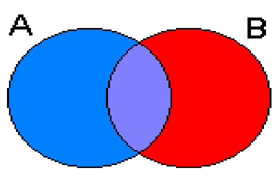
$$P(A)=\frac{\text{αριθμός στοιχείων στο A}}{\text{αριθμός στοιχείων στο S}}$$

Παράδειγμα: Ρίψη ζαριού. $A=\{\text{άρτιο αποτέλεσμα}\}=\{2,4,6\}$ $P(A)=3/6=½$

Ιδιότητες της Πιθανότητας

1. Για κάθε ενδεχόμενο Α: $P(\bar{A})=1-P(A)$
   $S=A\cup\bar{A}$ και από το 2^{o} αξίωμα έχουμε: $P(S)=P(A)+P(\bar{A}) \Rightarrow P(\bar{A})=1-P(A)$
2. Αν $A\cap B=\varnothing \Rightarrow P(A\cap B)=0$
   $\overline{A\cap B}=S \Rightarrow P(\overline{A\cap B})=1 \Rightarrow P(A\cap B)=0$

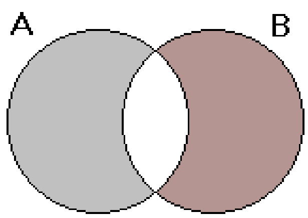
Είδαμε ότι για δύο ενδεχόμενα Α, Β έτσι ώστε $A\cap B=\varnothing$ έχω $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$.
Τί γίνεται για $P(A\cup B)$ αν $A\cap B\neq\varnothing$; Τότε έχω $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$



Όταν προσθέσουμε το Α και το Β ουσιαστικά προσθέτουμε δύο φορές την τομή τους ($A\cap B$) και για αυτό μετά την αφαιρούμε.

<u>Ασκήσεις</u>

1. Το 60% του πληθυσμού μιας πόλης είναι συνδρομητές στην Α εφημερίδα
   Το 80% είναι συνδρομητές στη Β εφημερίδα
   Το 50% είναι συνδρομητές και στις 2 εφημερίδες.
   Άρα $P(A)=0,6$, $P(B)=0,8$ και $P(A\cap B)=0,5$
   P(να είναι συνδρομητής σε μια τουλάχιστον εφημερίδα):
   $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0,6+0,8-0,5=0,9$
   P(μόνο σε μια συνδρομητής)$=P(A\cap \bar{B}$ ή $\bar{A}\cap B)=P(A\cap \bar{B})+P(\bar{A}\cap B)$
   $=[P(A)-P(A\cap B)]+[P(B)-P(A\cap B)]=0,4$



$A\cap \bar{B}$ $\quad$ $\bar{A}\cap B$

2. Διαλέγουμε μια οικογένεια η οποία έχει 2 αυτοκίνητα.
   A_1={το παλιό κατασκευάστηκε στην Αμερική(Α)}
   A_2={το καινούργιο κατασκευάστηκε στην Αμερική(Α)}
   $P(A_1)=0,7$ $\quad$ $P(A_2)=0,5$ $\quad$ $P(A_1\cap A_2)=0,4$
   - P(τουλάχιστον ένα στη Α)$=P(A_1\cup A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1\cap A_2)=0,7+0,5-0,4=0,8$
     γιατί $\bar{A}_1\cap \bar{A}_2=(\overline{A_1\cup A_2})$
   - P(κανένα κατασκευασμένο στην Α)=1-P(τουλάχιστον 1 στην Α)=1-0,8=0,2
   - P(ακριβώς ένα στην Α)$=P(\bar{A}_1\cap A_2)+P(A_1\cap \bar{A}_2)=0,4$

3. Δίνονται 3 διαφορετικά κρασιά Α,Β,Γ σε ένα δοκιμαστή ο οποίος τα ταξινομεί σε σειρά ανάλογα με την προτίμηση του.
   - Ο δειγματικός χώρος: S={ΑΒΓ, ΑΓΒ, ΒΓΑ, ΓΑΒ, ΓΒΑ}
   - P(να ταξινομήσει πρώτα το Α)=2/6=1/3
   - P(να ταξινομήσει πρώτο το Α και το Β τελευταίο)=1/6

4. Εστω Α,Β ενδεχόμενα με $A\leq B$. Να δειχτεί ότι $P(A)\leq P(B)$
   $B=A\cup(\bar{A}\cap B)\Rightarrow P(B)=P(A)+P(\bar{A}\cap B)\geq P(A)$