Έλεγχος Στατιστικών Υποθέσεων

Μια στατιστική υπόθεση είναι ένας ισχυρισμός για τις τιμές κάποιων παραμέτρων από ένα πληθυσμό.

πχ: 1) Ποσοστό ψηφοφόρων για το κόμμα Α: $p \leq 30\%$

2) Μέσος όρος βαθμολογίας στο πανεπιστήμιο: $\mu = 6{,}75$

3) Διαφορά θερμοκρασιών για δυο χημικές αντιδράσεις: $\mu_1 - \mu_2 = 3$

Για κάθε πρόβλημα στατιστικών υποθέσεων υπάρχουν δυο ισχυρισμοί:

Ο ένας ισχυρισμός υποστηρίζει την υπόθεση $(p \leq 30\%, \mu = 6.75)$

Ενώ ο άλλος ισχυρισμός ***δεν*** υποστηρίζει την υπόθεση $(p > 30\%, \mu \neq 6.75)$

Με βάση το τυχαίο δείγμα προσπαθώ να βρω τον αληθές ισχυρισμό.

Αρχικά θέτω την ***μηδενική*** υπόθεση (H_0) την οποία θέλω να απορρίψω.

πχ: $\underline{H_0} : \mu = 6{,}75$ $\qquad$ $\underline{H_a} : \mu \neq 6{,}75$ $\qquad$ $\leftarrow$ ***εναλλακτική υπόθεση***

$p \leq 30\%$ $\qquad$ $p > 30\%$

<u>Γενικά:</u> $H_0 : \Theta = \Theta_0$ **προς** $H_\alpha : \Theta < \Theta_0$

$\Theta > \Theta_0$

$\Theta \neq \Theta_0$

<u>Έλεγχος:</u>

Ο έλεγχος είναι ένας κανόνας που μας δείχνει κατά πόσον τα δεδομένα απορρίπτουν την H_0

πχ: $H_0 : p = 1/10$ προς $H_a : p < 1/10$, όπου $p =$ποσοστό ψηφοφόρων για το κόμμα Α

δείγμα 200 ψηφοφόρων, έστω x= # ψηφοφόρων για το κόμμα Α

Αν ισχύει η $H_0 : X \sim Bin(n = 200, p = 1/10)$

$$E(X) = n.p = 200.\, 1/10 = 20$$

Μια τιμή της $X = x$, πολύ μικρότερη του 20 θα απορρίψει την μηδενική υπόθεση H_0, ενώ μια τιμή <u>κοντά</u> στο 20 <u>δε θα απορρίψει</u> την H_0.

πχ: Απορρίπτω την $H_0 : x \leq 15$

$\downarrow$

στατιστική συνάρτηση

{0,1,2,……,15} χωρίο / περιοχή απόρριψης

Γενικά: ένας έλεγχος αποτελείται από μια στατιστική συνάρτηση και μια περιοχή απόρριψης.

Παράδειγμα: Κάποιος κατασκευαστής τσιγάρων ισχυρίζεται ότι η μέση ποσότητα νικοτίνης είναι το πολύ 1,5mg για κάθε τσιγάρο.

$H_0 : \mu = 1{,}5mg \qquad H_a : \mu > 1{,}5mg$

Θεωρώ δείγμα $n = 32$ τσιγάρων

Όταν ισχύει $H_0 : E(\overline{x}) = 1{,}5mg$

$H_a : E(\overline{x}) > 1{,}5mg$

$\text{XA} : \overline{x} > 1{,}6 \qquad \text{XA}$:χωρίο απόρριψης

Σφάλματα: (απορρίπτω)

	ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΟΣ H_0	ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΟΣ H_a
ΑΛΗΘΕΙΑ H_0	σφάλμα τύπου Ι	☑
ΑΛΗΘΕΙΑ H_a	☑	σφάλμα τύπου ΙΙ

α = P(σφάλμα τύπου Ι)

β = P(σφάλμα τύπου ΙΙ)

Παράδειγμα # 1:

Από τις προηγούμενες εκλογές γνωρίζουμε ότι το κόμμα Α είχε 25% των ψήφων. Οι υπεύθυνοι ισχυρίζονταν αύξηση του ποσοστού.

Έστω $n = 20$ δείγμα ψηφοφόρων

$H_0 : p = 1/4, \qquad H_a : p > 1/4$

Απορρίπτω αν $x \geq 8 \qquad x =$ # ψηφοφόρων για το Α

α=P(απορρίπτω H_0 / H_0 ισχύει)

$= P(x \geq 8 / x \sim Bin(20, 1/4)) = 1 - P(x \leq 7) = 1 - 0{,}898 = 0{,}102$

β=P(απορρίπτω H_a / H_0 ισχύει)

$= P(x \leq 7 / x \sim Bin(20, p)) \qquad p > 1/4$

$\downarrow$

Συνάρτηση του p

αν $p = 3/10$, τότε $\beta(3/10) = P(x \leq 7 / x \sim Bin(20, 3/10)) = 0{,}772$

p	$3/10$	$4/10$	$5/10$	$6/10$	$7/10$	$8/10$
$\beta(p)$	0,772	0,416	0,132	0,021	0,001	0,000

Έστω ότι απορρίπτουμε την H_0 για $x \geq 9$

Τότε $\alpha = P\left(x \geq 9 / x \sim Bin(20, 1/4)\right) = \ldots = 0{,}041$

Ενώ μπορεί να δειχτεί ότι:

$$\beta\left(3/10\right) = P\left(x \leq 8 / x \sim Bin(20, 3/10)\right) = 0{,}887$$

$$\beta\left(5/10\right) = P\left(x \leq 8 / x \sim Bin(20, 5/10)\right) = 0{,}252$$

Το σφάλμα του τύπου I <u>μειώνεται</u> ενώ
το σφάλμα του τύπου II <u>αυξάνεται</u>.

<u>Παράδειγμα # 2:</u>

$X_1, \ldots\ldots, X_{25}$ αποτελέσματα εξετάσεων
τυχαίο δείγμα από $N\left(\mu, \sigma^2 = 9^2\right)$

$\mathrm{H}_0 : \mu = 75$ προς $\mathrm{H}_\alpha : \mu < 75$

απορρίπτω (H_0) αν $\bar{x} \leq 70{,}8$

$$\alpha = P\left(x \leq 70{,}8 / \bar{x} \sim N(\mu_{\bar{x}} = 75, \sigma^2_{\bar{x}} = \frac{9^2}{5^2}) \right) = P\left(\frac{\bar{x} - 75}{1{,}8} \leq \frac{70{,}8 - 75}{1{,}8} \right)$$

$$= P(\Xi \leq -2{,}33) = 0{,}01$$

Υπολογίζω την πιθανότητα σφάλματος τύπου II όταν $\mu = 72$

$$\beta(72) = P\left(\bar{x} > 70{,}8 / \bar{x} \sim N(\mu_{\bar{x}} = 72, \sigma^2_{\bar{x}} = \frac{9^2}{5^2}) \right)$$

$$= 1 - P\left(\frac{\bar{x} - 72}{1{,}8} \leq \frac{70{,}8 - 72}{1{,}8} \right) = 1 - P(\Xi \leq -0{,}67) = 1 - 0{,}2514 = 0{,}7486$$

Παρόμοια για $\mu = 70$: $\beta(70) = 1 - \Phi\left(\frac{70{,}8 - 70}{1{,}8} \right) = 0{,}33$

Έστω τώρα ότι απορρίπτουμε αν $\bar{x} \leq 72$

Τότε :

$\alpha = P\left(\bar{x} \leq 72 / \bar{x} \sim N(25{,}1.8^2\right)$

$$= \Phi\left(\frac{72 - 75}{1{,}8} \right) = \Phi(-1{,}67) = 0{,}0475$$

$\beta(72) = \frac{1}{2}$ και $\beta(70) = 0{,}0027$

Όπως βλέπουμε το 'α' <u>αυξάνεται</u> ενώ το 'β' <u>μειώνεται</u>.
Άρα μια περιοχή απόρριψης θα πρέπει να διαλεχτεί έτσι ώστε να συμβιβάζονται οι τιμές των 'α' και 'β'.
Επειδή δεν μπορούμε να ελαχιστοποιήσουμε και τα δυο ταυτόχρονα, κρατάμε το 'α' σταθερό (επίπεδο σημαντικότητας) και ελαχιστοποιούμε το 'β'.

<u>Διάστημα Εμπιστοσύνης</u>

<u>Θεώρημα:</u> Μια περιοχή αποδοχής του ελέγχου $H_0 : \Theta = \Theta_0$ προς $H_\alpha : \Theta \neq \Theta_0$ Σε επίπεδο σημαντικότητας 'α' ονομάζεται $(1-a)\%$ Διάστημα Εμπιστοσύνης για το μ .