Διάλεξη # 21

Έλεγχοι Υποθέσεων για την Μέση Τιμή της Κανονικής

Θεωρώ τυχαίο δείγμα $X_1,...,X_n$ από $N(\mu,\sigma^2)$

1) Διακύμανση γνωστή.

Θεωρώ την H_0: $\mu=\mu_0$ (σταθερά) H_α: $\mu>\mu_0$

H_α: $\mu<\mu_0$

H_α: $\mu=\mu_0$

Για να εκτιμήσω την παραμέτρο μ χρησιμοποιώ την συνάρτηση $\overline{X}$. Όταν ισχύει η H_0 τότε, $\overline{X}\bullet(\mu_0,\frac{\sigma^2}{n})$ οπότε η συνάρτηση $Z=(\overline{X}-\mu_0)/\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\bullet N(0,1)$.

Z= απόσταση του $\overline{X}$ από το μ_0 σε μονάδες τυπικής απόκλισης. Αν η απόσταση είναι μεγάλη τότε απορρίπτω την H_0.

Γενικά: η H_0 $\mu=\mu_0$, επίπεδο σημαντικότητας: α.

Στατιστική Συνάρτηση : $Z=(\overline{X}-\mu_0)/\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Εναλλακτικές:	Χώρια Απόρριψης:
H_α: $\mu>\mu_0$	$Z>Z_\alpha$
H_α: $\mu<\mu_0$	$Z<Z_\alpha$
H_α: $\mu=\mu_0$	$Z<-Z_{\alpha/2}$ ή $Z>Z_{\alpha/2}$

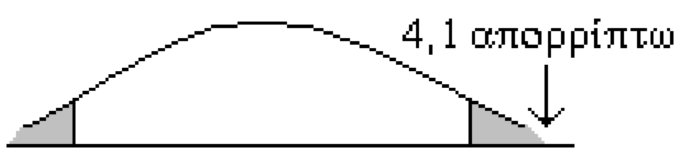
Παραδείγματα:

(1) Ένας κατασκευαστής ισχυρίζεται ότι το προϊόν του είναι ανθεκτικό στους 50°C. Θεωρώ δείγμα n=9 προϊόντων και έστω $\overline{X}$=52,05. Αν η κατανόμη του δείγματος είναι κανονική με σ=1,5 να εξεταστεί ο ισχυρισμός του κατασκευαστη με α=0,01.

Θα ελέγξω H_0: $\mu=50$ προς H_α: $\mu\neq 50$.

Υπολογίζω $Z=\frac{(52,05-50)}{1,5/\sqrt{9}}=4,1$

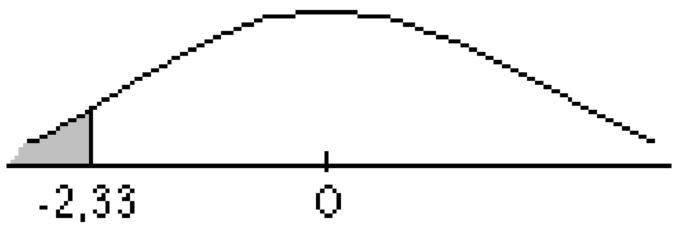
Απορρίπτω αν $Z<-Z_{0,005}$ ή $Z>Z_{0,005}$ $\Leftrightarrow$ $Z<-2,58$ ή $Z>2,58$



Αφού 4,1>2,58 απορρίπτω τη H_0, συνεπώς ο ισχυρισμός του κατασκευαστή δεν ισχύει σε α=0,01

(2) Έστω $X_1,...,X_{25}$ παρατηρήσεις από $N(\mu,\sigma=9)$. Ελέγχω H_0: $\mu=75$ προς H_α: $\mu<75$ και έστω $\overline{X}=72{,}3$ με $\alpha=0{,}01$.

Τότε $Z=\dfrac{75-72{,}3}{9/\sqrt{25}}=1.5$ Απορρίπτω αν $Z\leq -2{,}33$.



Άρα δεν απορρίπτω την H_0 σε επίπεδο σημαντικότητας $\alpha=0{,}01$

Η περιοχή αποδοχής μου δίνει ένα (1-α)% διάστημα εμπιστοσύνης για το μ:

$$|Z|\leq Z_{\alpha/2} \Rightarrow \left| (\overline{X}-\mu)/\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right| \leq Z_{\alpha/2} \Rightarrow \overline{X}-Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overline{X}+Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Για το παράδειγμα #1, ένα 99% διάστημα εμπιστοσύνης (Δ.Ε.) για το μ είναι

$$52{,}05 \pm 2{,}58\cdot\frac{1{,}5}{3} \Rightarrow (50{,}76\ ,\ 53{,}34)$$

2) Έλεγχοι με μεγάλα δείγματα

Αν δεν έχω κανονική αλλά το μέγεθος του δείγματος είναι μεγάλο (n>30), τότε η $Z=(\overline{X}-\mu_0)/\dfrac{S}{\sqrt{n}} \sim N(0,1)$ προσεγγιστικά όταν ισχύει η H_0: $\mu=\mu_0$.

Γιατί ισχύει η προσέγγιση $(\overline{X}-\mu_0)/\dfrac{S}{\sqrt{n}} = (\overline{X}-\mu_0)/\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\cdot\dfrac{\sigma}{S}$

- Από Κεντρικό Οριακό Θεώρημα (Κ.Ο.Θ.)
- Επειδή S^2 προσεγγίζει το σ^2

Οι αντίστοιχες περιοχές απόρριψης παραμένουν οι ίδιοι.

<u>Παράδειγμα:</u>

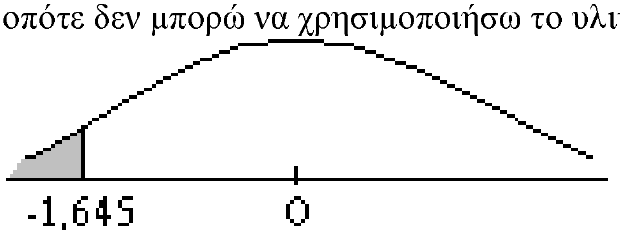
Για την ανέγερση μιας οικοδομής χρειάζεται ειδικό υλικό του οποίου η αντοχή να <u>μην</u> είναι μικρότερη από 3200. Θεωρώ τυχαίο δείγμα μεγέθους 36 και έστω ότι η μέση αντοχή $\overline{X}=3109$ και $S=156$.

Θα ελέγξω την H_0: $\mu=3200$ προς H_α: $\mu<3200$ σε $\alpha=5\%$

Η ελεγχοσυνάρτηση $Z=(\overline{X}-\mu_0)/\dfrac{S}{\sqrt{n}}=(3109-3200)/\dfrac{156}{\sqrt{36}}=-3{,}50$

•Δεν είναι κανονική
•36>30

Αλλά $Z_{0,05}=1{,}645$ Αφού $-3{,}50<-1{,}645$ απορρίπτω την H_0 άρα $\mu<3200$ οπότε δεν μπορώ να χρησιμοποιήσω το υλικό.



Ένα 95% Διάστημα Εμπιστοσύνης (Δ.Ε.) για το μ, δίνεται από

$$\overline{X} \pm Z_{\alpha/2}\cdot\frac{S}{\sqrt{n}} = 3109 \pm 1{,}645\cdot\frac{156}{\sqrt{36}}=(3066{,}23\ ,\ 3151{,}77) \text{ προσεγγιστικά}$$