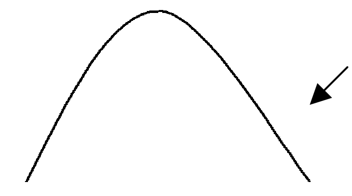
Διάλεξη 22

Μέση Τιμή και διακύμανση Άγνωστοι
$H_0: \mu = \mu_0$
$X_1, \ldots, X_n$ τυχαίο δείγμα από $N(\mu, \sigma^2)$ με μ και σ^2 άγνωστο.
Τότε ο έλεγχος γίνεται με τη στατιστική συνάρτηση

$T = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$ ⟵ t- κατανομή με (n-1) βαθμούς ελευθερίας.



t_n Το γράφημα της t-κατανομής είναι συμμετρικό.
Η μέση τιμή είναι ίση με 0 όταν n>2.

Οι ουρές της κατανομής είναι πιο βαριές από την κανονική.

Για την ελεγχοσυνάρτηση, παρατηρούμε ότι η μόνη διαφορά με την ελεγχοσυνάρτηση του προηγούμενου κεφαλαίου είναι η αντικατάσταση στον παρονομαστή του $\sigma/\sqrt{n}$.
Γενικά:
$H_0: \mu = \mu_0$, επίπεδο σημαντικότητας α
$T = \overline{X} - \mu_0 / s/\sqrt{n}$

Εναλλακτική	Χωρίο απόρριψης
Ηα: $\mu > \mu_0$	$t > t_{a};n-1$
Ηα: $\mu < \mu_0$	$t < -t_{a};n-1$
Ηα: $\mu \neq \mu_0$	$t \geq t_{\frac{a}{2}};n-1$ ή $t \leq -t_{\frac{a}{2}};n-1$

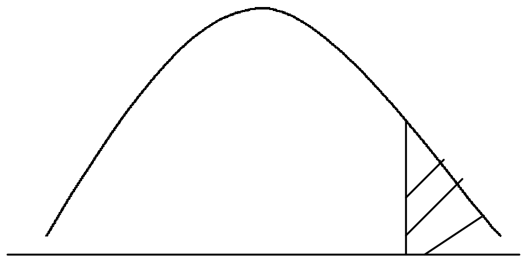
Ένα (1-α)% διάστημα εμπιστοσύνης δίνεται από

$\bar{X} \pm t_{\frac{a}{2}};n-1 \ \dfrac{s}{\sqrt{n}}$

<u>Παράδειγμα:</u> Τα παρακάτω δεδομένα έρχονται από κανονική:
25.8, 36.6 26.3, 21.8, 27.8,
H_0: $\mu = 25$ προς Ηα: $\mu > 25$ με $\alpha = 0.05$

Μπορούμε να υπολογίσουμε ότι $\bar{x} = 27.54$ και s=5.47, άρα
$t = (27.54-25)/(5.47/\sqrt{5}) = 1.04$

Επίσης $t_{a;n-1}=t_{0.05};4=2.132$



2.132

Η μηδενική υπόθεση δεν απορρίπτεται, σε επίπεδο σημαντικότητας 5%

<u>Άσκηση</u>

Ένα δείγμα 12 ανιχνευτών ραδιενέργειας εκτέθηκε σε ραδιενέργεια πεδίο έντασης . Τα παρακάτω είναι αποτελέσματα από ανιχνευτές:

105.6, 90.9, 91.2, 96.5, 91.3, 100.1, 105.0, 99.6, 107.7, 103.3, 92.4,

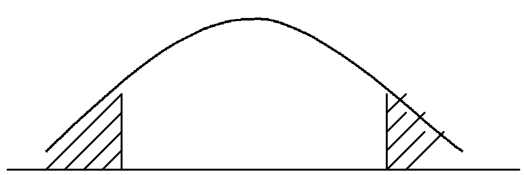
Να ελεγχθεί η υπόθεση H_0: $\mu=100$ προς $H\alpha$: $\mu \neq 100$ σε επίπεδο σημαντικότητας α=5%

Έχω n=12, $\bar{x}=98.375$ και s=6.1095

Τότε $T=\dfrac{98.375-100}{6.1095/\sqrt{12}}=-0.9213$

Απορρίπτω αν $t \leq -t_{\frac{a}{2};n-1}$ ή $t \geq t_{\frac{a}{2};n-1}$

$\Leftrightarrow$ $t \leq -2.201$ ή $t \geq 2.201$



-2.201 -2.201

Άρα δεν απορρίπτω H_0, συνεπώς η μέση τιμή αυτών των αποτελεσμάτων δε διαφέρει από 100, σε επίπεδο σημαντικότητας 5%

Ένα 95% Δ.Ε για το μ

$98.375 \pm 2.201\dfrac{6.1095}{\sqrt{12}} \Rightarrow (94.495,102.255)$

Έλεγχοι για Ποσοστά

Έστω X~Bin(n,p) Θέλω να ελέγξω H_0:p=p_0

Τότε εκτιμώ p με $\hat{p} = \frac{x}{n} = \frac{αριθμός επιτυχιών}{ολικός αριθμός προσπαθειών}$

Έχω ότι E($\hat{p}$)=p και Var($\hat{p}$)=$\frac{p(1-p)}{n}$

Από το κεντρικό οριακό θεώρημα

$\frac{\hat{p}-po}{\sqrt{po(1-po)/\sigma n}}$ ~N(0,1) προσεγγιστικά

Γενικά

H_0:p=p_0 σε επίπεδο σημαντικότητας α

$$Z=\frac{\hat{p}-po}{\sqrt{po(1-po)/n}}$$

Εναλλακτική	Χωρίο απόρριψης
$H_α$: p> p_0	$Z \geq Z_α$
$H_α$: p< p_0	$Z \leq -Z_α$
$H_α$: $p \neq p_0$	$Z \leq -Z_{\frac{a}{2}}$ ή $Z \geq Z_{\frac{a}{2}}$

Ένα (1-α)% Διάστημα εμπιστοσύνης δίνεται από

$$\hat{p} \pm z_{\frac{a}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

<u>Παράδειγμα</u>

Ανάμεσα σε 102 γιατρούς μόνο 47 απάντησαν ότι γνωρίζουν το κοινό όνομα ενός φαρμάκου.

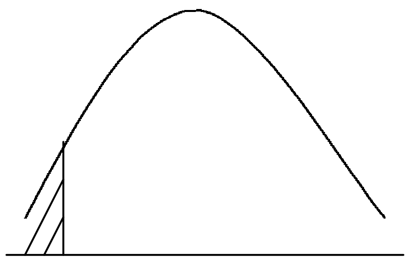
Δώστε ένα έλεγχο της υπόθεσης ότι λιγότερο από τους μισούς γιατρούς γνωρίζουν το κοινό όνομα αυτού του φαρμάκου σε επίπεδο σημαντικότητας α=0.01

Έστω p= ποσοστό γιατρών που γνωρίζουν.

H_0:p=$\frac{1}{2}$ προς $H_α$: p<1/2

$\hat{p} = \frac{47}{102}$=0.461

Άρα $Z=\dfrac{0.461-0.5}{\sqrt{\dfrac{(0.5).(0.5)}{102}}}=-0.79$



-2.33

Εχω ότι $Z_{0.01}=2.33$ Άρα απορρίπτω αν$Z<-2.33$. Αφού $-0.79>-2.33$ δεν απορρίπτω H_0, άρα δεν υπάρχει απόδειξη βάση των δεδομένων ότι λιγότερο του 50% των γιατρών γνωρίζουν το φάρμακο.

Ένα 99% διάστημα εμπιστοσύνης δίνεται από

$$p\pm Z_{0.005}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}=\frac{47}{102}\pm 2.58\sqrt{\frac{\frac{47}{102}(1-\frac{47}{102})}{102}}=(0.33,0.58)$$

<u>Άσκηση</u>

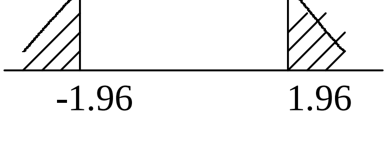
Κυβερνητικό γραφείο ισχυρίζεται ότι από όλα τα αυτοκίνητα που ελέγχθηκαν για κάποιο πρόβλημα, 70% πέρασε επιτυχώς την πρώτη φορά. Έστω τυχαίο δείγμα 200 αυτοκινήτων για τα οποία 156 πέρασαν την πρώτη φορά. Το δείγμα υποστηρίζει τον ισχυρισμό του κυβερνητικού γραφείου; Να ελεγχθεί η υπόθεση σε α=5%

H_0:70/100 προς H_α:$p\neq 70/100$

=156/200

$$Z=\frac{\hat{p}-p(0)}{\sqrt{\frac{p(0)(1-p(0))}{n}}}=\frac{\frac{156}{200}-\frac{70}{100}}{\sqrt{\frac{(70/100)(1-70/100)}{200}}}=2.469$$

Aαπορρίπτω αν $Z\leq -1.96$ ή $Z\geq 1.96$



-1.96 1.96

Αφού $2.469>1.96$ απορρίπτω τον ισχυρισμό του κυβερνητικού γραφείου σε επίπεδο σημαντικότητας α=5%

Ένα 95% διάστημα εμπιστοσύνης για το p δίνεται από

$$\hat{p} \pm 1.96\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = \frac{156}{200} \pm 1.96\sqrt{\frac{\frac{156}{200}(1-\frac{56}{200})}{200}} = (0.723, 0.837)$$