Διάλεξη # 4

Συνδυαστική

Μεταθέσεις (Δίχως επανατοποθέτηση)

Ορισμός: Μια διατεταγμένη ακολουθία κ αποτελεσμάτων από ένα σύνολο n διαφορετικών αποτελεσμάτων λέγεται μετάθεση μεγέθους κ από τα n στοιχεία.
Συμβολίζω με $P_{κ;n}$

Παράδειγμα: n=3 {Α, Β, Γ} κ=2
Άρα ΑΒ ΑΓ ΒΑ ΒΓ ΓΑ ΓΒ
Θέλω να υπολογίσω την ποσότητα $P_{κ;n}$

$$P_{κ;n} = \underset{1^{ου}}{n}\ \underset{2^{ου}}{(n-1)}\ \underset{3^{ου}}{(n-2)} \dots \underset{κ-1}{[n-(κ-2)]}\ \underset{κ}{[n-(κ-1)]}$$

Αριθμός Επιλογών:

Από το νόμο συνδυαστικής για κ-άδα

Παράδειγμα: 1. $P_{2;3}=3\cdot 2=6$
2. 8 βοηθοί βαθμολογούν 4 απαντήσεις. Με πόσους τρόπους μπορούμε να βαθμολογήσουμε τα γραπτά έτσι ώστε ο κάθε βοηθός να διορθώσει μια και μόνο μια απάντηση.
$P_{4;8}=8\cdot 7\cdot 6\cdot 5=1680$

Ορισμός: Για καθέ ακέραιο αριθμό n, ορίζω n παραγοντικό από $n!=1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n$ $n>1$ $0!=1$

$$_{κ;n}=n(κ-1)\ldots[n-(κ-1)]=\frac{n(κ-1)\ldots[n-(κ-1)](n-κ)\ldots 2\cdot 1}{(n-κ)\ldots 2\cdot 1}=\frac{n!}{(n-κ)!}.$$

Συνδυασμοί

Με πόσους τρόπους μπορούμε να πάρουμε από n στοιχεία μια μη διατεταγμένη ακολουθία n αποτελεσμάτων;

Ορισμός: Έστω σύνολο με ν διαφορετικά στοιχεία. Κάθε μη διατεγμένη ακολουθία n αποτελεσμάτων από αυτό το σύνολο λέγεται συνδυασμός.

Ο αριθμός των δυνατών συνδυασμών συμβολίζεται με $C_{κ;n}=\binom{n}{κ}$.

Ο αριθμός συνδυασμών μεγέθους κ είναι μικρότερος από τον αριθμό των μεταθέσεων, γιατί όταν αγνοήσουμε τη διάταξη ένας αριθμός μεταθέσεων αντιστοιχεί στον ίδιο συνδυασμό.

Παράδειγμα: {Α, Β, Γ, Δ, Ε}
Έχουμε n=5 και αν κ=3 τότε $P_{3;5}=\frac{5!}{2!}=60$ μεταθέσεις μεγέθους 3 από τα 5

Θεωρώ τον συνδυασμό {Α,Β,Γ}. Πόσες μεταθέσεις αντιστοιχούν σε αυτό το συνδυασμό; (Α,Β,Γ)(Α,Γ,Β)(Β,Α,Γ)(Β,Γ,Α)(Γ,Α,Β)(Γ,Β,Α) έξι μεταθέσεις αντιστοιχούν στο συνδυασμό {Α,Β,Γ}. Όμοια για κάθε άλλο συνδυασμό μεγέθους 3 έχω 6 μεταθέσεις=3! Άρα:

$60=\binom{5}{3}\cdot 3! \Rightarrow \binom{5}{3}=\frac{60}{3!}=10$ δυνατοί συνδυασμοί μεγέθους 3 από τα 5 στοιχεία

Αυτοί οι δέκα συνδυασμοί είναι: {Α,Β,Γ} {Α,Β,Δ} {Α,Β,Ε} {Α,Γ,Δ} {Α,Γ,Ε} {Α,Δ,Ε} {Β,Γ,Δ} {Β,Γ,Ε} {Β,Δ,Ε} {Γ,Δ,Ε}.

Γενικά για αντικείμενα από n $P_{\kappa;n}=\dfrac{n!}{(\kappa-n)}=C_{\kappa;n}\cdot\kappa! \Rightarrow C_{\kappa;n}=\dfrac{n!}{\kappa!(\kappa-n)!}$.

Παράδειγμα: Μια εταιρεία ενοικίασης αυτοκινήτων έχει 10 εισαγόμενα και 15 εγχώρια αυτοκίνητα, τα οποία χρειάζονται επισκευή. Λόγω έλλειψης μηχανικών, μόνο 6 μπορούν να επισκευαστούν. Αν διαλέξουμε 6 ποία η πιθανότητα τα 3 ακριβώς να είναι εγχώρια;

$$D_3=\{\text{ακριβώς 3 εγχώρια}\} \quad P(D_3)=\frac{\#\text{ αποτελεσμά των του } D_3}{\#\text{ αποτελεσμάτων του } S}=\frac{\overset{\text{Αριθμός συνδυασμών εγχώριων}}{\binom{15}{3}}*\overset{\text{Αριθμός συνδυασμών εισαγόμενων}}{\binom{10}{3}}}{\binom{25}{6}}=0,3083$$

Ποιά η P(τουλάχιστον 3 εγχώρια);

Αν ορίσω το D_4 D_5 D_6 έχω:

$$P(D_3\cup D_4\cup D_5\cup D_6)=P(D_3)+P(D_4)+P(D_5)+P(D_6)=$$

$$=\frac{\binom{15}{3}*\binom{10}{3}}{\binom{25}{6}}+\frac{\binom{15}{4}*\binom{10}{2}}{\binom{25}{6}}+\frac{\binom{15}{5}*\binom{10}{2}}{\binom{25}{6}}+\frac{\binom{15}{6}}{\binom{25}{6}}$$

Λέμε ότι δύο ενδεχόμενα είναι ανεξάρτητα $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$

Παράδειγμα: 5 ανεξάρτητες ρίψεις νομίσματος με P(Κ)=1/3 P(Γ)=2/3

$D_3=\{\text{ακριβώς 3Γ}\}$ $\binom{5}{3}$=10 δυνατοί συνδυασμοί 3Γ σε 5 ρίψεις.

$P(\Gamma\Gamma\Gamma KK)=P(\Gamma)\cdot P(\Gamma)\cdot P(\Gamma)\cdot P(K)\cdot P(K)=(2/3)^3\cdot(1/3)^2$

$P(D_3)=10\cdot(2/3)^3\cdot(1/3)^2=\binom{5}{3}\cdot(2/3)^3\cdot(1/3)^2$

$P(\text{τουλάχιστον 3Γ})=P(D_3\cup D_4\cup D_5)=P(D_3)+P(D_4)+P(D_5)=$

$$=\binom{5}{3}\cdot(2/3)^3\cdot(1/3)^2+\binom{5}{4}\cdot(2/3)^4\cdot(1/3)+(2/3)^5$$