

LECTURE 5

ΥΠΟ ΣΥΝΘΗΚΗ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ

ή ΔΕΣΜΕΥΜΕΥΜΕΝΗ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ

Τώρα εξετάζουμε κατά πόσο η πληροφορία 'το ενδεχόμενο B πραγματοποιήθηκε' επηρεάζει την πιθανότητα ενός ενδεχομένου A.

πχ. Έστω $A = \{\text{ασθενής}\}$, $B = \{\text{αρνητικό τεστ αίματος}\}$.

Προφανώς η πιθανότητα του A, δοθέντος του αποτελέσματος του τεστ, αλλάζει. (μείωση)

Συμβολισμός: $P(A/B) \rightarrow$ υπό συνθήκη πιθανότητα του A δοθέντος του B.

Παράδειγμα: Κάποιες συνιστώσες μηχανημάτων κατασκευάζονται από δυο διαφορετικές γραμμές παραγωγής: A, A'

Η A έχει πιο παλιά μηχανήματα από την A' και είναι πιο αργή και λιγότερο αξιόπιστη.

Θεωρώ ότι: $B = \{\text{δεν λειτουργεί}\}$, και $B' = \{\text{λειτουργεί}\}$

	B	B'
A	2	6

= 8 μηχανήματα

A'	1	9
----	---	---

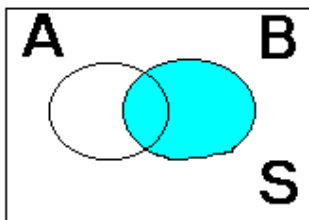
= 10 μηχανήματα

Διαλέγουμε μια συνιστώσα, τυχαία, πριν να δούμε κατά πόσο λειτουργεί:

$$P(A) = ? = \frac{8}{18} = \frac{4}{9}$$

Μετά από πείραμα, βλέπουμε ότι δεν λειτουργεί

$$P(A/B) = \frac{2}{3} = \frac{2/18}{3/18} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$



Δοθέντος ότι το B πραγματοποιήθηκε, ο δειγματικός χώρος είναι το B.

Άρα το A πραγματοποιείται, αν τα στοιχεία στην $A \cap B$ πραγματοποιούνται.

Ορισμός: Έστω A και B ενδεχόμενα $P(B) > 0$. Η υπό συνθήκη πιθανότητα του A

δοθέντος B ορίζεται από $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

Παράδειγμα: Από όλους όσους αγοράζουν 'PC' 60% συμπεριλαμβάνουν ένα πρόγραμμα επεξεργαστή κειμένου, 40% λογισμικό, 30% και τα δυο.

$\Rightarrow A = \{ \text{επεξεργαστής κειμένου} \}, B = \{ \text{λογισμικό} \}$

$$P(A) = 0.6$$

$$P(B) = 0.4$$

$$P(A \cap B) = 0.3$$

$$\blacksquare \quad P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,3}{0,4} = 0,75 = 75\%$$

Απ' όλους που διάλεξαν το λογισμικό, το 75% διάλεξε επίσης επεξεργαστή κειμένου.

$$\blacksquare \quad P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{0,3}{0,6} = 0,5 = 50\%$$

<u>Γενικά:</u> =	}	$P(A/B) \neq P(B/A)$ $P(A/B) \neq P(A)$
------------------	---	--

$$\blacksquare \quad P(\bar{A}/B) = 1 - P(A/B) = 1 - 0,75 = 0,25$$

Παράδειγμα: Ένα περιοδικό δημοσιεύει 3 στήλες «Τέχνη» (A), «Βιβλίο» (B), και «Κινηματογράφος» (C). Οι συνήθειες του αναγνωστικού κοινού δίνονται από τις πιθανότητες:

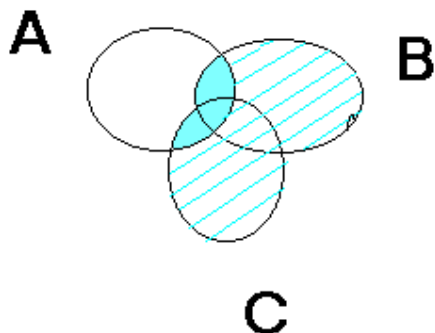
A	B	C	A ∩ B	A ∩ C	B ∩ C	A ∩ B ∩ C
0,14	0,23	0,37	0,08	0,09	0,13	0,05

$$1) \quad P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,08}{0,23} = 0,348$$

2)

$$P(A/B \cup C) = \frac{P([A \cap (B \cup C)])}{P(B \cup C)} = \frac{P[(A \cap B) \cup (A \cap C)]}{P(B \cup C)} =$$

$$\frac{P(A \cap B) + P(A \cap C) - P(A \cap B \cap C)}{P(B) + P(C) - P(B \cap C)} = \frac{0,08 + 0,09 - 0,05}{0,23 + 0,37 - 0,13} = 0,255$$



3) P(διαβάζει τουλάχιστον μια στήλη)=

$$P(A/A \cup B \cup C) = \frac{P[A \cap (A \cup B \cup C)]}{P(A \cup B \cup C)} = \frac{P(A)}{P[(A \cup B) \cup C]} = \frac{P(A)}{P(A \cup B) + P(C) - P[(A \cup B) \cap C]} =$$

$$\frac{P(A)}{P(A) + P(B) - P(A \cap B) + P(C) - P[(A \cap C) \cup (B \cap C)]} =$$

$$\frac{P(A)}{P(A) + P(B) + P(C) + P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)} =$$

$$\frac{0,14}{0,14 + 0,23 + 0,37 + 0,08 - 0,09 - 0,13 + 0,05} = \frac{0,14}{0,49} = 0,286$$

Από τον ορισμό της Υπό Συνθήκη Πιθανότητας:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A/B)P(B) \quad (\text{πολλαπλασιαστικός νόμος})$$

Παράδειγμα: Έχω 4 δότες αίματος, των οποίων η ομάδα αίματος είναι άγνωστη.
Έστω ότι ζητείτε κάποιος με ομάδα A. Ποια η πιθανότητα, τουλάχιστον 3 να δώσουν, μέχρι να βρεθεί η A;

Έστω: $B = \{ \text{ο } 1^{\text{ος}} \text{ δεν έχει } A \}$
 $A = \{ \text{ο } 2^{\text{ος}} \text{ δεν έχει } A \}$

$$\Rightarrow P(B) = \frac{3}{4}, \quad P(A/B) = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = P(A/B)P(B) = \frac{3}{4} \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$$

P (ο 3^{ος} που θα δώσει έχει A)

=P (3^{ος} έχει A / όχι 1^{ος} και όχι 2^{ος})

=P (όχι ο 2^{ος} / όχι ο 1^{ος}) * P (όχι ο 1^{ος})

$$= \frac{1}{2} \frac{2}{3} = \frac{1}{3} = 0,25$$