ΑΝΕΞΑΡΤΗΣΙΑ

Δύο ενδεχόμενα A και B λέγονται 'ανεξάρτητα' αν και μόνο αν ισχύει:

$$\boxed{P(A/B) = P(A)}$$

Δηλαδή:

Η γνώση μου για το B δεν επηρεάζει την πιθανότητα του A

Παρατηρώ ότι όταν ισχύει η ανεξαρτησία έχω :

$$P(A/B) = P(A)$$
$$\Leftrightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A)$$
$$\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Παράδειγμα: Ρίψη ζαριού

A = {2,4,6}

B = {1,2,3}

C = {1,2,3,4}

$$P(A) = \frac{1}{2} \qquad P(B) = \frac{1}{2}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{6} \neq \frac{1}{2}\frac{1}{2} = P(A)P(B) \qquad \rightarrow A, B$$ δεν είναι ανεξάρτητα

$$P(C) = \frac{2}{3}$$

$$P(A \cap C) = \frac{1}{3} = \frac{1}{2}\frac{2}{3} = P(A)P(C) \qquad \rightarrow A, C$$ είναι ανεξάρτητα

Ισχυρισμός: Αν A και B ανεξάρτητα, τότε A και $\overline{B}$ ανεξάρτητα.

Πρέπει να δείξω ότι : $P(A/\overline{B}) = P(A)$

$$P(A/\overline{B}) = \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{1 - P(B)} =$$
$$\frac{P(A) - P(A)P(B)}{1 - P(B)} = \frac{P(A)[1 - P(B)]}{1 - P(B)} = P(A)$$

$\rightarrow A_1, A_2, A_3$ είναι ανεξάρτητα αν-ν:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$$
$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2)$$
$$P(A_1 \cap A_3) = P(A_1)P(A_3)$$
$$P(A_2 \cap A_3) = P(A_2)P(A_3)$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 'BAYES'

Παράδειγμα:
Μια αλυσίδα καταστημάτων έχει 3 διαφορετικά είδη τηλεοράσεων . Από τις πωλήσεις 50% A, 30% B, 20% Γ. Κάθε κατασκευαστής δίνει ένα χρόνο εγγύησης.
Γνωρίζουμε ότι το 25% από τις A χρειάζεται επιδιόρθωση μέσα στο χρόνο, ενώ τα αντίστοιχα ποσοστά για τις άλλες είναι 20%B και 10% Γ.

1) Ποια είναι η πιθανότητα κάποιος να αγόρασε A και να χρειάζεται επιδιόρθωση;

   Έστω A_i ={μάρκα i} , i=1,2,3
   B ={επιδιόρθωση}

$$\Rightarrow P(A_1 \cap B) = P(B/A_1)P(A_1) = 0{,}25.0{,}5 = 0{,}125$$
$$P(A_1) = 0{,}5$$
$$P(A_2) = 0{,}3$$
$$P(A_3) = 0{,}2$$ εκ των προτέρων
$$P(B/A_1) = 0{,}25$$
$$P(B/A_2) = 0{,}2$$
$$P(B/A_3) = 0{,}1$$

2) P (επιδιόρθωση) = $P(B)$

$$B = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup (B \cap A_3)$$

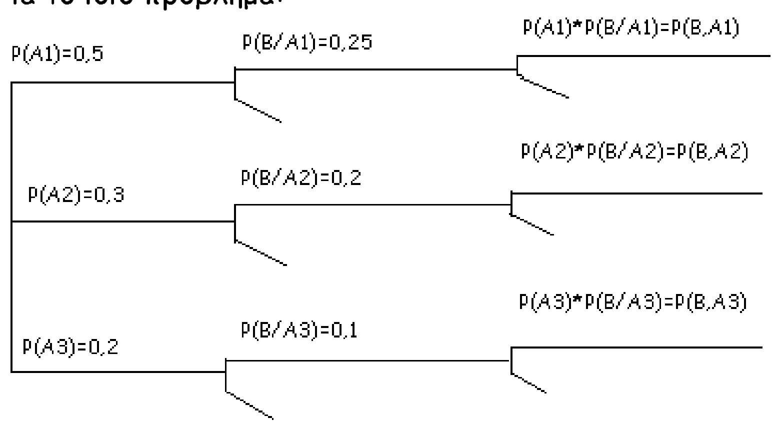
$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + P(B \cap A_3) =$$
$$P(B/A_1)P(A_1) + P(B/A_2)P(A_2) + P(B/A_3)P(A_3) = 0{,}205$$

Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας

3) P (μάρκα Α / επιδιόρθωση) $P(A_1/B)$

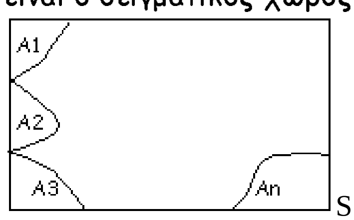
$$\left\{\begin{array}{l} P(A_1/B)=\dfrac{P(A_1\cap B)}{P(B)}=\dfrac{0{,}125}{0{,}205}=0{,}61 \\ \\ P(A_2/B)=\dfrac{P(A_2\cap B)}{P(B)}=.........=0{,}29 \\ \\ P(A_3/B)=\dfrac{P(A_3\cap B)}{P(B)}=.........=0{,}1 \end{array}\right\}$$ εκ των υστέρων=θεώρημα 'Bayes'

Για το ίδιο πρόβλημα:



Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας

Έστω $A_1,............,A_n$ }ξένα ανά δυο ενδεχόμενα έτσι ώστε η ένωσή τους να είναι ο δειγματικός χώρος S



Για κάθε ενδεχόμενο B:

$$P(B)=P(B/A_1)P(A_1)+P(B/A_2)P(A_2)+.......+P(B/A_n)P(A_n)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(B/A_i)P(A_i)$$

Θεώρημα 'Bayes'

Έστω $A_1, ..., A_n$ }ξένα ανά δυο ενδεχόμενα έτσι ώστε η ένωσή τους να είναι ο δειγματικός χώρος S

Τότε για κάθε ενδεχόμενο B ,

Δοθέντος $P(A_i)$ και $P(B/A_i)$:

$$\rightarrow P(A_i / B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B/A_i)P(A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(B/A_j)P(A_j)}$$

1) Άσκηση:

Από μια σπάνια ασθένεια πάσχει 1 στους 1000 ενήλικες.

Διαγνωστικός έλεγχος : Θετικό αποτέλεσμα 99% δοθέντος ότι κάποιος πάσχει
Θετικό αποτέλεσμα 2% δοθέντος ότι κάποιος δεν πάσχει

Πιθανότητα κάποιος να είναι ασθενής, δοθέντος θετικό αποτέλεσμα

A_1={πάσχει}, A_2={δεν πάσχει}

B={θετικό αποτέλεσμα}

$P(A_1) = 0{,}001$ $P(B/A_1) = 0{,}99$

$P(A_2) = 0{,}999$ $P(B/A_2) = 0{,}2$

$$P(A_1 / B) = \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B/A_1)P(A_1)}{P(B/A_1)P(A_1) + P(B/A_2)P(A_2)} = \frac{0{,}99.0{,}001}{0{,}99.0{,}001 + 0{,}2.0{,}999} =$$

$$\frac{0{,}00099}{0{,}02097} = 0{,}047$$

2) Άσκηση:

Φυλακισμένοι   A, B, C

Και ακριβώς δυο θα εκτελεστούν (A,B) (B,C) (A,C)

O B θα εκτελεστεί

R = {απάντηση του φύλακα}

ψάχνουμε:

$$P[(A,B)/R] = \frac{P[R/(A,B)]P(A,B)}{P[R/(A,B)]P(A,B) + P[R/(B,C)]P(B,C) + P[R/(A,C)]P(A,C)} =$$

$$\frac{1.\,{}^{1}\!/_{3}}{1.\,{}^{1}\!/_{3} + {}^{1}\!/_{2}.\,{}^{1}\!/_{3} + 0.\,{}^{1}\!/_{3}} = \frac{2}{3}$$