LECTURE 7:

Τυχαίες Μεταβλητές

Παράδειγμα :

Ρίχνουμε ένα νόμισμα : S *(δειγματικός χώρος)*

Οι πιθανότητες να φέρουμε $K \rightarrow 0$

Οι πιθανότητες να φέρουμε $\Gamma \rightarrow 1$

Ρίχνουμε ένα ζάρι : S

• → 1
•• → 2
••• → 3
•••• → 4
••••• → 5
•••••• → 6

Ορισμός :

Τυχαία Μεταβλητή είναι μία απεικόνιση του δειγματικού χώρου σε ένα σύνολο αριθμών .

Ασκήσεις :

(1) *Θεωρούμε δύο πιθανότητες : Αποτυχία / Επιτυχία*

$S = \{A, E\}$, $X(A) = 0$

$X(E) = 1$

(2) *Καλούμε έναν τηλεφωνικό αριθμό μέσω ενός μηχανισμού*

Πιθανότητα $Y = 1$ *αν ο αριθμός βρίσκεται στον κατάλογο*

Πιθανότητα $Y = 0$ *αν ο αριθμός δεν βρίσκεται στον κατάλογο*

$Y(528296) = 1$ *αν ο 528296 είναι στον κατάλογο*

$Y(752735) = 0$ *αν ο 752735 δεν είναι στον κατάλογο*

(3) *Ρίχνουμε το νόμισμα τόσες φορές όσες αναλογούν μέχρι*

τα πρώτα γράμματα.

X = # (αριθμός) ρίψεων πριν από τα πρώτα γράμματα
$S = \{Γ, ΚΓ, ΚΚΓ, ...\}$

$X(Γ) = 1$	Κάθε θετικός ακέραιος αριθμός
$X(ΚΓ) = 2$	είναι δυνατή τιμή του X.
$X(ΚΚΓ) = 3$	

(4) Θεωρούμε την τυχαία μεταβλητή X
X = βαθμός σε διαγώνισμα

$$0 \le x \le 10$$

Κάθε πραγματική τιμή μεταξύ του 0 και του 10 είναι δυνατή τιμή του X.

<u>Διακριτές Τυχαίες Μεταβλητές</u>

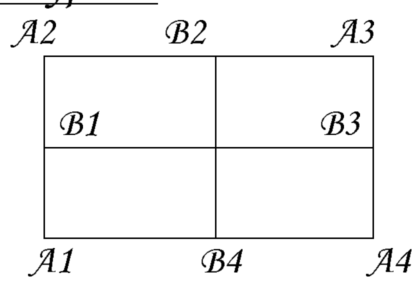
Ορισμός:

Ένα σύνολο λέγεται αριθμήσιμο αν περιέχει πεπερασμένο αριθμό στοιχείων ή τα στοιχεία του αποτελούν μία ακολουθία για την οποία υπάρχει το πρώτο στοιχείο, το δεύτερο κ.ο.κ.
{Δες παραδείγματα 1,2,3}

Ορισμός:

Μία τυχαία μεταβλητή ονομάζεται διακριτή, αν το σύνολο τιμών της είναι αριθμήσιμο.

<u>Παραδείγματα:</u>



Ο X βρίσκεται στο σημείο 0. Ρίχνοντας ένα ζάρι, αποφασίζει αν θα πάει στις B1, B2, B3, B4. Τότε πάλι με ένα ζάρι αποφασίζει αν θα πάει στις δίπλα πλευρές ή αν θα ξαναγυρίσει στο 0.

(α) Έστω Y = # κινήσεων του X πριν να γυρίσει στο 0.

$Y = 2,4,6,8,10,12,14,16,.....$ (αριθμήσιμο).

(β) Έστω ότι επιτρέπουμε διαγώνιες κινήσεις.

$Y = 2,3,4,5,....$ αφού η επιστροφή στο 0 είναι πιθανή για αριθμό ρίψεων >1.

(2) X = Ο αριθμός αντλιών σε χρήση για 2 βενζινάδικα από τα οποία το ένα έχει 6 αντλίες και το άλλο 4.

$X1$ = ο αριθμός αντλιών σε χρήση στο 1, $X1 = 0,1,2,....,6$

$X2$ = ο αριθμός αντλιών σε χρήση στο 2, $X2 = 0,1,2,3,4$

(α) $T = X1+X2$, $T = 0,.......,10$

(β) $Y = \max.(X1, X2)$

$Y = 0,1,2,.....,6$

$X1 = 0$

$Max(0,X2) : \max(0,0), \max(0,1), \max(0,2),.....,\max(0,4)$

0	1	2	4

$Y = 0,1,2,3,4,5,6$

$X1 = 1$

$Max(1,X2) : \max(1,0), \max(1,1), ...,\max(1,4)$

1	1	4

.
.
.
.

$X1 = 5$

$Max(5,X2) : \max(5,0), \max(5,1), ...,\max(5,4)$

5	5	5

Συνάρτηση Μάζας Πιθανότητας

Η συνάρτηση μάζας πιθανότητας μίας διακριτής τυχαίας μεταβλητής, μας λέει πως η ολική πιθανότητα 1 κατανέμεται ανάμεσα στις πιθανές τιμές μίας τυχαίας μεταβλητής (τ.μ.)

Π.χ. (1) Έχουμε 6 φορτία ηλεκτρικών συσκευών

Αριθμός συσκευών για επιδιόρθωση ανα φορτίο

Φορτίο	1	2	3	4	5	6
#συσκευών για επιδιόρθωση	0	2	0	1	2	0

Διαλέγουμε τυχαία ένα φορτίο ,

X = #συσκευών για επιδιόρθωση

$X = 0,1,2$ $\otimes$

$P(X=0) = P(1 \text{ ή } 3 \text{ ή } 6) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$P(X=1) = P(4) = \frac{1}{6}$

$P(X=2) = P(2, 5) = \frac{2}{6}$

$P(X=x) = \quad = 0 \qquad x \neq 0,1,2$

Η $\otimes$ ορίζει μία συνάρτηση μάζας πιθανότητας

Γενικά η συνάρτηση μάζας πιθανότητας δίνεται απο

$P(x) = P(X=x) \qquad x$: τιμές της X

$P(x) \geq 0$

$\sum p(x) = 1$

(2) Μία ομάδα έχει 5 δωρητές αίματος A, B, C, D, E και έστω ότι μόνο οι A, B έχουν την Ο ομάδα αίματος. Παίρνουμε ένα δείγμα αίματος απο κάθε δωρητή

Υ = #μεταγγίσεων για να βρούμε την Ο ομάδα

$p(1) = P(Y=1) = P[(A\ ,\ B)] = \frac{2}{5}$

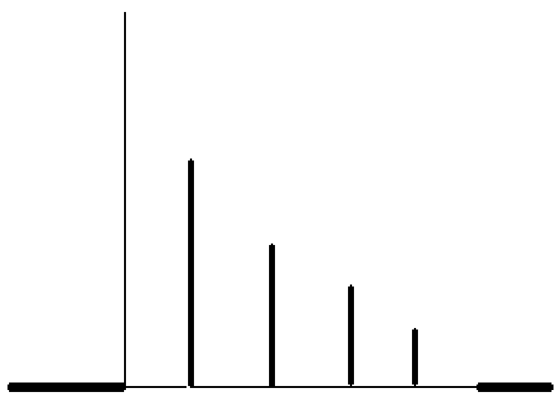
$p(2) = P(Y=2) = P($πρώτα $[\ C\ ,\ D\ ,\ E\ ]$ και μετά $[\ A\ ,\ B\ ]\ )$

$\quad = P[\ (A\ ,\ B\ )\ /\ (C\ ,\ D\ ,\ E)]\ P\ (C\ ,\ D\ ,\ E) = \frac{2}{4} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{10}$

$p(3) = P(Y=3) = .2 = \frac{2}{10}$

$p(4) = P(Y=4) = P(\ C\ ,\ D\ ,\ E$ πρώτα $) = \frac{1}{10}$

$p(\psi) = 0\ , \qquad \psi \neq 1,2,3,4$



(3) *Ρίχνουμε ένα νόμισμα.*

Αριθμός ρίψεων μέχρι τα πρώτα $Γ = X$

(ανεξάρτητες ρίψεις) , $P(Γ) = p$

$X = 1,2,3,4,\ldots\ldots$

$P(X=1) = P(\ Γ\ ) = p$

$P(X=2) = P(ΚΓ) = p(Κ)\ p(Γ) = (1-p) \times p$

$P(X=3) = P(\ ΚΚΓ) = (1-p) \times\ (1-p) \times p$

$$P(X=4) = P(KKK\Gamma) = (1-p)\times(1-p)\times(1-p)\times p$$

.

.

.

.

$$P(X=x) = P(KKK\ldots\ldots K\Gamma) = (1-p)^{x-1}\times p$$

<u>Γεωμετρική Τυχαία Μεταβλητή</u>