<u>*LECTURE 8 :*</u>

Από το προηγούμενο μάθημα , είχαμε υπολογίσει την παρακάτω συνάρτηση μάζας πιθανότητας :

$$P(x) = \begin{cases} 1/2 & X = 0 \\ 1/6 & X = 1 \\ 2/6 & X = 2 \\ 0 & X \end{cases}$$

Η πιθανότητα η τυχαία μεταβλητή Χ να είναι το πολύ 1 , είναι :
$P(\chi \leq 1) = P(0) + P(1) = 2/3$ *αφού* $\{\chi \leq 1\} = \{\chi=0$ *ή* $\chi=1\}$

Όμοια : $P(X\leq 1,5) = P(X\leq 1)$
$P(X\leq 0) = P(0) = 1/2$

Αλλά $P(X\leq -1,5) = 0$

Επίσης $P(X\leq 2) = 1$ *αλλά και* $P(X\leq 3) = 1$

<u>*Σημαντική παρατήρηση :*</u> $P(X \leq 1) = 2/3$ *αλλά* $P(X<1) = ½$

Γενικά για διακριτές τυχαίες μεταβλητές $P(X\leq \chi) \neq P(X<\chi)$

Έχουμε τον παρακάτω ορισμό :

<u>*Ορισμός :*</u> *Έστω Χ τυχαία μεταβλητή . Η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της Χ ,ορίζεται για κάθε αριθμό χ από*

$$\mathcal{F}(\chi) = P(X \leq \chi) = \sum_{\psi\leq \chi} p(\psi)$$

$\mathcal{F}(x)$: πιθανότητα ότι η X θα είναι το πολύ x .

Επίσης από παράδειγμα από προηγούμενο μάθημα ,
ορίζουμε Y = # μεταγγίσεων μέχρι να βρω Ο θετικό .

Y	1	2	3	4
p(ψ)	.4	.3	.2	.1

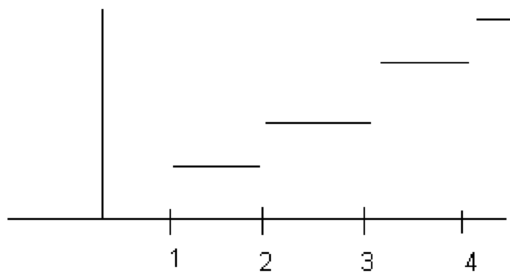
Πρώτα υπολογίζουμε την $\mathcal{F}\psi(\psi)$ στα σημεία { 1,2,3,4, }

$\mathcal{F}(1) = P(Y \leq 1) = .4$
$\mathcal{F}(2) = P(Y \leq 2) = .4+.3 = .7$
$\mathcal{F}(3) = P(Y \leq 3) = .4+.3+.2 = .9$
$\mathcal{F}(4) = P(Y \leq 4) = .4+.3+.2+.1 = 1$

Για κάθε άλλο ψ , η αθροιστική συνάρτηση κατανομής θα είναι ίση με την τιμή της $\mathcal{F}$ στην πλησιέστερη τιμή της Y από τα αριστερά του ψ .

Άρα $\mathcal{F}(2.7) = P(Y \leq 2.7) = \mathcal{F}(2) = .7$
$\mathcal{F}(3.999) = P(Y \leq 3.999) = \mathcal{F}(3) = .9$

$$F(Y) = \begin{cases} 0 & \text{if } y<1 \\ .4 & \text{if } 1<y<2 \\ .7 & \text{if } 2<y<3 \\ .9 & \text{if } 3<y<4 \\ 1 & \text{if } y>4 \end{cases}$$



Είδαμε πώς να υπολογίζουμε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής από την συνάρτηση μάζας πιθανότητας. Μπορεί να γίνει και το αντίστροφο.

Στο πρώτο παράδειγμα ξανά από το προηγούμενο μάθημα

X = #συνιστωσών που δεν λειτουργούν

$$P(3) = P(X = 3)$$
$$=[P(0)+P(1)+P(2)+P(3)] - [P(0)+P(1)+P(2)]$$
$$= P(X\leq 3)-P(X\leq 2)$$

Αν θέλουμε $P(2\leq \chi\leq 4) = \rho(2)+\rho(3)+\rho(4)$

$$=\{\rho(0)+\rho(1)+\dots\dots+\rho(4)\} - \{\rho(0)+\rho(1)\}$$
$$=\rho(X\leq 4) - \rho(X\leq 1)$$

Γενικά, έχω την παρακάτω πρόταση:

__*Πρόταση:*__ Έστω X τυχαία μεταβλητή διακριτή, και $a,b : a\leq b$

$$P(a\leq X\leq b) = F(B) - F(a-1)$$

Αν $a=b$ $\quad P(X=a) = F(a) - F(a-1)$

Αναμενόμενη Τιμή μίας τυχαίας μεταβλητής X

Η αναμενόμενη τιμή της X δίνεται από:

$E(X) = \mu = \sum x.p(x)$ (σταθμητός μέσος όρος των χ)

Π.χ. Έστω ότι υπάρχει Πανεπιστήμιο με 15,000 φοιτητές.
X = # τάξεων που παίρνει ένας φοιτητής

x	1	2	3	4	5	6	7
p(x)	.01	.03	.13	.25	.39	.17	.02

Για να βρούμε τον μέσο αριθμό τάξεων ανά φοιτητή:

$E(X) = (1\times,01)+(2\times 0,03) + \ldots\ldots\ldots+(7\times 0,02) = 4,57$

Π.χ. Έστω X Bernoulli τυχαία μεταβλητή

$$P(\chi) = \begin{cases} \rightarrow \rho & \chi = 1 \\ \rightarrow 1\text{-}\rho & \chi = 0 \end{cases}$$

$E(X) = p$

Ιδιότητες

$E(aX + b) = aE(X)+b$

$E[aX+b] = \sum (ax+b).p(x) = aE(\chi)+b$

Γενικά $E(h(\chi)) = \sum h(xi).p(xi)$

Π.χ. Ένα μαγαζί έχει αγοράσει υπολογιστές με 500 K / υπολογιστή. Θα τους πουλήσει 1000 K/υπολογιστή. Ο κατασκευαστής έχει συμφωνήσει να αγοράσει τα απούλητα μηχανήματα μετά από μία περίοδο με 200 K/υπολογιστή.

X = #υπολογιστών που πουλιούνται
και ας υποθέσουμε ότι $p(0) = .1$, $p(1) = .2$, $p(2) = .3$, $p(3) = .4$

Άρα κέρδος $= 1000.X + 200(3-\chi)-1500$
$= 800X - 900$

$E(Y) = 800EX - 900 = 800 \times 2 - 900 = 700$

Άλλοι υπολογιστές : $EX = 0\times p(0) + 1\times p(1) + 2\times p(2) + 3\times p(3) =$
$= .2 + .6 + 1.2 = 2$

Διακύμανση μίας τυχαίας μεταβλητής X

Έστω X τυχαία μεταβλητή με $EX = \mu$

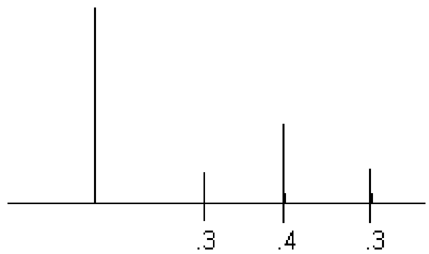
Η διακύμανση της X ορίζεται από
$VarX = \sigma = \sum (x-\mu) . p(\chi)$

Η τυπική απόκλιση είναι $\sigma = \sqrt{\sigma}$

Π.χ. (1) X με συνάρτηση μάζας πιθανότητας :

x	3	4	5
p(x)	.3	.4	.3

$EX = 4$

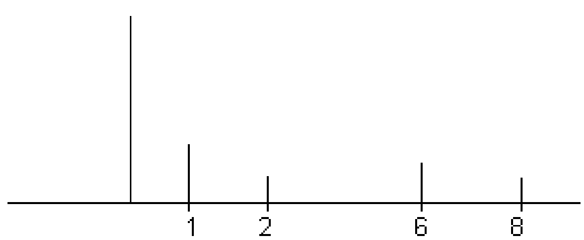


$\sigma = \sum (x-4)\,p(x) \quad \chi = 3,4,5$

$\Rightarrow \ = .6 \ \ \kappa\alpha\iota \ \ \sigma = \sqrt{.6} \ = .77$

(2) Χ με συνάρτηση μάζας πιθανότητας :

x	1	2	6	8
p(x)	.4	.1	.3	.2



Πάλι $\mu = 4$ *αλλά* $Var(X) = 8.4$, $\sigma = 2.9$

<u>Ιδιότητες</u> *(χωρίς απόδειξη):*

(1) $VarX = EX - EX$ *όπου* $EX = \sum X.P(X)$

(2) $Var(aX+b) = aVarX$

Για το πρόβλημα με το μαγαζί υπολογιστών
$Var(Y) = Var(800X) = 800\ VarX = 640.000$