ΕΚΤΙΜΗΤΙΚΗ

Εκτίμηση Παραμέτρων σε Σημείο

Χ τ.μ. , μετρά επιτυχίες
Χ ακολουθεί την κατανομή Bernoulli και είναι τέτοια ώστε,
$\mathrm{P}(\mathrm{X}=\chi)=\begin{cases}\rho \quad , & \chi=1\\ 1-\rho \quad , & \chi=0\end{cases}$

δηλαδή , $\mathrm{P}(\mathrm{X}=\chi)=\rho^{\chi}(1-\rho)^{1-\chi}$. Η πιθανότητα επιτυχίας ρ, ονομάζεται **παράμετρος.**
Η παράμετρος ρ παίρνει τις τιμές 0 και 1, $\rho\in[0,1]$ και ονομάζουμε το σύνολο των τιμών τις παραμέτρου ρ **παραμετρικό χώρο.**

<u>Παράδειγμα 1</u>
Δοθέντος τυχαίου δείγματος $\mathrm{X}_1,\mathrm{X}_2,\ldots,\mathrm{X}_n$ από την κατανομή Bernoulli με άγνωστη παράμετρο ρ, ζητάμε να εκτιμηθεί το ρ. Ένας καλός εκτιμητής του ρ είναι σαφώς ο μέσος όρος, $\hat{\rho}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}\mathrm{X}_i}{n}$

<u>Παράδειγμα 2</u>
Έστω τυχαίο δείγμα $\mathrm{X}_1,\mathrm{X}_2,\ldots,\mathrm{X}_n\sim\mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$. Ο παραμετρικός χώρος των (μ,σ^2) είναι $(-\infty,\infty)\times(0,\infty)$ και η συνάρτηση πυκνότητας των τυχαίων μεταβλητών X_i, όπου $i=1,2,\ldots n$ είναι $f(\chi,\mu,\sigma^2)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-1}{2\sigma^2}(\chi-\mu)^2}$

<u>Παράδειγμα 3</u>
Η τυχαία μεταβλητή $\mathrm{X}\sim G(\alpha,\beta)$ έχει συνάρτηση πυκνότητας
$f(\chi,\alpha,\beta)=\dfrac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}\chi^{\alpha-1}e^{\frac{-\chi}{\beta}}$, όπου $\chi>0$ και ο παραμετρικός χώρος του (α,β) είναι $\vartheta=\{(\alpha,\beta)\quad \alpha,\beta>0\}$.

Αρχές εκτιμητικής

1. Αμεροληψία
2. Ελάχιστη διακύμανση
3. Επάρκεια
4. Συνέπεια

Ορισμός

Εκτιμήτρια ονομάζεται κάθε στατιστική συνάρτηση του δείγματος, $\mathrm{T} = \mathrm{T}(\mathrm{X}_1, \ldots \mathrm{X}_n)$

Π.χ $\overline{\mathrm{X}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i$ (δειγματικός μέσος)

και $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(\mathrm{X}_i - \overline{\mathrm{X}}\right)$ (δειγματική διασπορά)

Αμεροληψία

$\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n$ τυχαίο δείγμα με συνάρτηση πυκνότητας $f(\chi, \vartheta)$. Να εκτιμηθεί η παραμετρική συνάρτηση $g(\vartheta)$.

Ορισμός

Η εκτιμήτρια T ονομάζεται **αμερόληπτη** για την παραμετρική συνάρτηση $g(\vartheta)$ αν και μόνο αν $\mathrm{E}(\mathrm{T}) = g(\vartheta)$.

Παράδειγμα 1

$\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n$ τυχαίο δείγμα με συνάρτηση κατανομής F τέτοια ώστε $\mathrm{E}(\mathrm{X}_i) = \mu$ και $Var(\mathrm{X}_i) = \sigma^2$. Τότε παρατηρούμε ότι ο $\overline{\mathrm{X}}$ είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια του μ αφού $\mathrm{E}(\overline{\mathrm{X}}) = \mathrm{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{X}_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}(\mathrm{X}_i) = \frac{n\mu}{n} = \mu$ και η S^2 είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια του σ^2,

$$\mathrm{E}(S^2) = \mathrm{E}\left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(\mathrm{X}_i - \overline{\mathrm{X}}\right)^2\right) = \frac{1}{n-1}\mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\mathrm{X}_i - \overline{\mathrm{X}}\right)^2\right) = \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}\left(\mathrm{X}_i^{\,2}\right) - n\mathrm{E}\left(\overline{\mathrm{X}^2}\right)\right] =$$

$$\frac{1}{n-1}\left(n\left(\sigma^2 + \mu^2\right) - n\left(\sigma^2 + \mu^2\right) - n\left(\frac{\sigma^2}{n} + \mu^2\right)\right) = \frac{1}{n-1}\left(n\sigma^2 + n\mu^2 - \sigma^2 - n\mu^2\right)$$

$$= \frac{1}{n-1}(n-1)\sigma^2 = \sigma^2$$

Παράδειγμα 2

Έστω τυχαία μεταβλητή $\mathrm{X} \sim G\left(\alpha = 2, \beta = \frac{1}{\vartheta}\right)$. Τότε η $U = \frac{1}{\mathrm{X}}$ είναι μια αμερόληπτη εκτιμήτρια του ϑ, διότι $\mathrm{E}\left(\frac{1}{\mathrm{X}}\right) = \int_0^{\infty}\frac{1}{\chi}\frac{\chi e^{-\vartheta\chi}}{\left(\frac{1}{\vartheta}\right)^2\Gamma(2)}\partial\chi = \int_0^{\infty}\vartheta^2 e^{-\vartheta\chi}\partial\chi = \vartheta$

Παράδειγμα3

Έστω τυχαίο δείγμα από τη Poison με παράμετρο ϑ, $X_1,\dots X_n \sim P(\vartheta)$ και συνάρτηση πυκνότητας $f(\chi,\vartheta)=\dfrac{e^{-\vartheta}\vartheta^{\chi}}{\chi!}, \quad \chi = 0,1,\dots n$.

Τότε ζητείται να βρούμε αμερόληπτη εκτιμήτρια του ϑ.

Αφού, $E(\overline{X})=\vartheta$, ο $\overline{X}$ είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια για το ϑ.

Επιπλέον να βρεθεί και μια αμερόληπτη εκτιμήτρια του ϑ^2.

Θεωρώ τη στατιστική συνάρτηση $T=\sum_{i=1}^{n} X_i \sim P(n\vartheta)$, τότε παρατηρώ ότι

$$Var(T)=E(T^2)-E^2(T) \Leftrightarrow n\vartheta = E(T^2)-n^2\vartheta^2 \Leftrightarrow E(T)=E(T^2)-n^2\vartheta^2$$

$$\Leftrightarrow E\left(\frac{T^2-T}{n^2}\right)=\vartheta^2$$

Άρα η στατιστική συνάρτηση $\left(\dfrac{T^2-T}{n^2}\right)$ είναι αμερόληπτη για το ϑ^2.

Ορισμός

Θεωρώ, $b(t)=E(T)-g(\vartheta)$ το οποίο ονομάζουμε **ποσό μεροληψίας (bias)** και παρατηρούμε ότι $b(t)=0$ όταν η στατιστική συνάρτηση T είναι αμερόληπτη και αντίστοιχα $b(t)\neq 0$ όταν η T δεν είναι αμερόληπτη.

Ορίζουμε επίσης το **τετραγωνικό σφάλμα της εκτίμησης** που δίνεται από τη συνάρτηση $(T-g(\vartheta))^2$, και το **μέσο τετραγωνικό σφάλμα της εκτίμησης** που δίνεται από την $E(T-g(\vartheta))^2$.

Παρατηρούμε ότι το μέσο τετραγωνικό σφάλμα μπορεί να γραφεί ως εξής,

$$\begin{aligned} E(T-g(\vartheta))^2 &= E[(T-E(T))+(E(T)-g(\vartheta))]^2 \\ &= E(T-E(T))^2 + 2E[(T-E(T))(E(T)-g(\vartheta))]+E(E(T)-g(\vartheta))^2 \\ &= Var(T)+2[E(T)-g(\vartheta)]E(T-E(T))+b^2(T) \end{aligned}$$

Άρα μ.τ.σ(T)=$E(T-g(\vartheta))^2 = Var(T)+b^2(T)$.

Αν ο T είναι αμερόληπτος τότε $b(T)=0$ και κατά συνέπεια αναζητώ την εκτιμήτρια εκείνη που έχει την ελάχιστη διακύμανση (Α.Ο.Ε.Δ).

Έστω $\mathrm{X}_1,\ldots,\mathrm{X}_n \sim \mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$.
Θέλω να εκτιμήσω την παράμετρο σ^2.
Ο αμερόληπτος εκτιμητής του σ^2 είναι $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(\mathrm{X}_i - \overline{\mathrm{X}}\right)^2$.
Το μέσο τετραγωνικό σφάλμα του S^2, μ.τ.σ.(S^2)= $\mathrm{E}\left(S^2-\sigma^2\right)=Var\left(S^2\right)$.

<u>Ορισμός της χ^2_n</u>

Έστω $\mathrm{Z}_1,\ldots\mathrm{Z}_n \sim \mathrm{N}(0,1)$ τότε η τυχαία μεταβλητή $\mathrm{Y}=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Z}_i^2 \sim \chi^2_n$ και

$$\mathrm{E}(\mathrm{Y})=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}\left(\mathrm{Z}_i^2\right)=n$$

$$Var(\mathrm{Y})=\sum_{i=1}^{n}Var\left(\mathrm{Z}_i^2\right)=2n$$

διότι $Var\left(\mathrm{Z}^2\right)=\mathrm{E}\left(\mathrm{Z}^4\right)-\mathrm{E}^2\left(\mathrm{Z}^2\right)=3-1=2$ αφού $\mathrm{E}\left(\mathrm{Z}^4\right)=\int_{-\infty}^{\infty} z^4\phi(z)dz=3$.

Παρατηρούμε επίσης ότι

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

Άρα $$Var\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right)=2(n-1) \Leftrightarrow \frac{(n-1)^2}{\sigma^4}Var\left(S^2\right)=2(n-1) \Leftrightarrow Var\left(S^2\right)=\frac{2\sigma^4}{n-1}$$

έχουμε δείξει δηλαδή ότι το μ.τ.σ. της S^2 είναι $\frac{2\sigma^4}{n-1}$ είναι δηλαδή ίση με τη διακύμανση λόγω αμεροληψίας.

<u>**Παράδειγμα**</u>

Θεωρώ την εκτιμήτρια cS^2, όπου c είναι σταθερά. Θα υπολογίσω τη σταθερά c τέτοια ώστε να ελαχιστοποιήσω το μ.τ.σ. της cS^2. Αλλά το μ.τ.σ. της cS^2 είναι

$$\mathrm{E}\left\{\left(cS^2-\sigma^2\right)^2\right\}=\mathrm{E}\left(c^2S^4-2cS^2\sigma^2+\sigma^4\right)$$

$$=c^2\mathrm{E}\left(S^4\right)-2c\sigma^2\mathrm{E}\left(S^2\right)+\sigma^4 \qquad \text{(I)}$$

Αλλά, $\mathrm{E}\left(S^2\right)=\sigma^2$

και $$\mathrm{E}\left(S^4\right)=Var\left(S^2\right)+\mathrm{E}^2\left(S^2\right)=\frac{2\sigma^4}{n-1}+\sigma^4$$

Οπότε,

$$\mathrm{E}\left\{\left(cS^2-\sigma^2\right)^2\right\}=c^2\frac{n+1}{n-1}\sigma^4-2c\sigma^4+\sigma^4$$

παραγωγίζω και εξισώνω με το μηδέν

$$2c\frac{n+1}{n-1}\sigma^4-2\sigma^4=0$$

Άρα το ελάχιστο δίνεται για $c^* = \frac{n+1}{n-1}$ και το μέσο τετραγωνικό σφάλμα της cS^2 για $c = c^*$ δίνεται αντικαθιστώντας το c^* στην (I) και τότε έχουμε ότι το μ.τ.σ. $\left(cS^2\right) = \frac{2\sigma^4}{n+1}$.

Συμπερασματικά είδαμε ότι η S^2 είναι αμερόληπτη για το σ^2 με διασπορά $\frac{2\sigma^4}{n+1}$.

Όμως, η $\frac{n-1}{n+1}S^2$ που δεν είναι αμερόληπτη για το σ^2 έχει μικρότερο μ.τ.σ. από την S^2, αφού $\frac{2\sigma^4}{n+1} < \frac{2\sigma^4}{n-1}$.

<u>Μέθοδος Εύρεσης Αμερόληπτης Εκτιμήτριας Ελαχίστης Διασποράς (Α.Ο.Ε.Δ)</u>

$\mathrm{X}_1,\ldots\mathrm{X}_n \sim f(\chi,\vartheta),\ \vartheta\in\Theta$

<u>Συνθήκες Ομαλότητας</u>

1) Θ ανοικτό υποσύνολο του $\Re$

2) $\{\chi : f(\chi,\vartheta)>0\}$ είναι ανεξάρτητο του ϑ

3) $\dfrac{df(\chi,\vartheta)}{d\vartheta}$ υπάρχει και είναι συνεχής

4) $\dfrac{d}{d\vartheta}\left[\int_D\ldots\int_D f(\chi_1,\vartheta)\ldots f(\chi_n,\vartheta)\,d\chi_1\ldots d\chi_n\right]=\int_D\ldots\int_D \dfrac{d}{d\vartheta}\{f(\chi_1,\vartheta),\ldots f(\chi_n,\vartheta)\}\,d\chi_1\ldots d\chi_n$

5) Αν $\mathrm{T}\left(\underset{\sim}{\mathrm{X}}\right)$ εκτιμήτρια του ϑ,

$$\frac{d}{d\vartheta}\int\ldots\int \mathrm{T}\left(\underset{\sim}{\chi}\right)\prod_{i=1}^{n} f(\chi_i,\vartheta)\quad d\chi_1\ldots d\chi_n=\int\ldots\int\frac{d}{d\vartheta}\mathrm{T}\left(\underset{\sim}{\chi}\right)\prod_{i=1}^{n} f(\chi_i,\vartheta)\quad d\chi_1\ldots d\chi_n$$

6) $\mathrm{E}\left(\dfrac{d\log f(\chi,\vartheta)}{d\vartheta}\right)^2=\mathrm{I}(\vartheta)>0$**,** όπου την ποσότητα $\mathrm{I}(\vartheta)$ την ονομάζουμε **πληροφορία Fisher**.

<u>Θεώρημα(Ανισότητα Gramer-Rao)</u>

Έστω τυχαίο δείγμα $\mathrm{X}_1,\ldots\mathrm{X}_n\sim f(\chi,\vartheta)$ και T εκτιμήτρια τέτοια ώστε $\mathrm{E}(\mathrm{T})=\vartheta+b_{\mathrm{T}}(\vartheta)$. Τότε, όταν ισχύουν οι συνθήκες ομαλότητας,

$$Var(\mathrm{T})\geq\frac{\{1+b'(\vartheta)\}^2}{n\mathrm{I}(\vartheta)}$$

<u>Απόδειξη</u>

$\vartheta+b(\vartheta)=\int\ldots\int\mathrm{T}(\chi_1,\ldots,\chi_n)\ f(\chi_1,\vartheta)\ldots f(\chi_n,\vartheta)\quad d\chi_1\ldots d\chi_n$

$\Rightarrow$ (παραγωγίζω ως προς ϑ)

$$1+b'(\vartheta)=\int\ldots\int\mathrm{T}(\chi_1,\ldots\chi_n)\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(f(\chi_1,\vartheta)\ldots f(\chi_n,\vartheta)\right)\quad d\chi_1\ldots d\chi_n$$

$$=\int\ldots\int\mathrm{T}(\chi_1,\ldots,\chi_n)\left\{\frac{\partial f(\chi_1,\vartheta)}{\partial\vartheta}f(\chi_2,\vartheta)\ldots f(\chi_n,\vartheta)+\ldots+f(\chi_1,\vartheta)\ldots\frac{\partial f(\chi_n,\vartheta)}{\partial\vartheta}\right\}\quad d\chi_1\ldots d\chi_n$$

$$=\int\ldots\int\mathrm{T}\left(\underset{\sim}{\chi}\right)\left\{\frac{\partial f(\chi_1,\vartheta)}{\partial\vartheta}\frac{1}{f(\chi_1,\vartheta)}f(\chi_1,\vartheta)\ldots f(\chi_n,\vartheta)+.+\frac{\partial f(\chi_n,\vartheta)}{\partial\vartheta}\frac{1}{f(\chi_n,\vartheta)}\prod_{i=1}^{n}f(\chi_i,\vartheta)\right\}$$

$$=\int\ldots\int\mathrm{T}(\chi_1,\ldots,\chi_n)\left\{\frac{\partial f(\chi_1,\vartheta)}{\partial\vartheta}\frac{1}{f(\chi_1,\vartheta)}+\ldots+\frac{\partial f(\chi_n,\vartheta)}{\partial\vartheta}\frac{1}{f(\chi_n,\vartheta)}\right\}\prod_{i=1}^{n}f(\chi_i,\vartheta)\quad d\chi_1\ldots d\chi_n$$

$$=\int\ldots\int\mathrm{T}(\chi_1,\ldots,\chi_n)\left\{\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\log f(\chi_i,\vartheta)}{\partial\vartheta}\right\}\prod_{i=1}^{n}f(\chi_i,\vartheta)\quad d\chi_1\ldots d\chi_n$$

οπού $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\log f(\chi_i,\vartheta)}{\partial\vartheta}=W$, τότε

$\Rightarrow 1+b'(\vartheta)=\mathrm{E}[\mathrm{T}W]$

$$\mathrm{E}(W)=\mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\log f(\chi_i,\vartheta)}{\partial\vartheta}\right)=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}\left(\frac{\partial\log f(\chi_i,\vartheta)}{\partial\vartheta}\right)=n\mathrm{E}\left(\frac{\partial\log f(\chi,\vartheta)}{\partial\vartheta}\right)$$

αλλά,

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\left(\frac{\partial\log f(\chi,\vartheta)}{\partial\vartheta}\right)&=\int\frac{\partial\log f(\chi,\vartheta)}{\partial\vartheta}f(\chi,\vartheta)\quad d\vartheta\\&=\int\frac{1}{f(\chi,\vartheta)}f'(\chi,\vartheta)\,f(\chi,\vartheta)\quad d\vartheta\\&=\int\frac{\partial f(\chi,\vartheta)}{\partial\vartheta}\quad d\chi\\&=0\end{aligned}$$

Άρα, $\mathrm{E}(W)=0$

$$Cov(\mathrm{T},W)=\mathrm{E}(\mathrm{T}W)-\mathrm{E}(\mathrm{T})\mathrm{E}(W)=1+b'(\vartheta)$$

από την ανισότητα Cauchy-Schwartz, γνωρίζουμε ότι,

$$Cov^2(\mathrm{T},W)\le Var(\mathrm{T})Var(W)$$

συνεπώς,

$$\{1+b'(\vartheta)\}^2\le Var(\mathrm{T})Var(W)$$

αλλά,

$$\begin{aligned}Var(W)&=Var\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\log f(\chi_i,\vartheta)}{\partial\vartheta}\right)\\&=nVar\left(\frac{\partial\log f(\chi,)}{\partial\vartheta}\right)\\&=n\mathrm{E}\left(\frac{\partial\log f(\chi,\vartheta)}{\partial\vartheta}\right)^2\\&=n\mathrm{I}(\vartheta).\end{aligned}$$

<u>Παρατηρήσεις</u>

1. Αν $\mathrm{E}(\mathrm{T})=\vartheta$, τότε

$$Var(\mathrm{T})\ge\frac{1}{n}\mathrm{I}(\vartheta)$$

2. Αν $\mathrm{E}(\mathrm{T})=g(\vartheta)$, τότε

$$Var(\mathrm{T})\ge\frac{\{g'(\vartheta)\}^2}{n\mathrm{I}(\vartheta)}$$

Μεθοδολογία

1. Έστω U αμερόληπτη εκτιμήτρια για το $g(\vartheta)$.
2. Υπολογίζω την $Var(U)$.
3. Υπολογίζω το κάτω φράγμα της ανισότητας Gramer-Rao
4. Αν 2. = 3. τότε η U είναι η Α.Ο.Ε.Δ.

Παράδειγμα1

$\mathrm{X}_1,\ldots,\mathrm{X}_n \sim \mathrm{P}(\vartheta)$

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}=\chi,\vartheta)=\frac{e^{-\vartheta}\vartheta^{\chi}}{\chi!},\quad \chi=0,1,\ldots$$

Να βρεθεί Α.Ο.Ε.Δ. για το ϑ.

Θεωρώ $U=\overline{\mathrm{X}}$.

$\mathrm{E}(\overline{\mathrm{X}})=\vartheta$

$$Var(\overline{\mathrm{X}})=\frac{\vartheta}{n}$$

$$\log \mathrm{P}(\mathrm{X}=\chi,\vartheta)=-\vartheta+\chi\log\vartheta-\log\chi$$

$$\frac{d}{d\vartheta}\{-\vartheta+\chi\log\vartheta-\log\chi\}=-1+\frac{\chi}{\vartheta}$$

$$\mathrm{I}(\vartheta)=\mathrm{E}\left(\frac{\chi}{\vartheta}-1\right)^2=\frac{\mathrm{E}(\chi-\vartheta)^2}{\vartheta^2}=\frac{\vartheta}{\vartheta^2}=\frac{1}{\vartheta}$$

κάτω φράγμα της Gramer-Rao : $\dfrac{1}{n\mathrm{I}(\vartheta)}=\dfrac{\vartheta}{n}$

άρα ο $\overline{\mathrm{X}}$ είναι Α.Ο.Ε.Δ. για την ϑ, όταν το δείγμα ακολουθεί την Poison.

<u>Παρατήρηση</u>

Ισχύει $\mathrm{I}(\vartheta)=\mathrm{E}\left(\frac{\partial \log f(\chi,\vartheta)}{\partial\vartheta}\right)^2 = -\mathrm{E}\left(\frac{\partial^2 \log f(\chi,\vartheta)}{\partial^2\vartheta}\right)$

όταν ισχύουν και οι άλλες συνθήκες ομαλότητας.

<u>Απόδειξη</u>

$$\log f(\chi,\vartheta) \xrightarrow{\partial/\partial\vartheta} \frac{1}{f} f' \xrightarrow{\partial/\partial\vartheta} \frac{f'' f - (f')^2}{f^2}$$

$$-\mathrm{E}\left(\frac{\partial^2 \log f(\chi,\vartheta)}{\partial\vartheta}\right) = \mathrm{E}\left(\frac{f'' f - (f')^2}{f^2}\right) = \mathrm{E}\left(\frac{f'}{f}\right)^2 - \mathrm{E}\left(\frac{f''}{f}\right) = \mathrm{E}\left(\frac{\partial \log f(\chi,\vartheta)}{\partial\vartheta}\right)^2$$

<u>Παράδειγμα 1</u>

$\mathrm{X}_1,\ldots\mathrm{X}_n$ τ.δ. $\sim \mathrm{N}(\mu,\vartheta)$ όπου το μ είναι γνωστό.

Αναζητώ Α.Ο.Ε.Δ. εκτιμητή για το ϑ.

$$f(\chi,\vartheta)=\left(\frac{1}{2\pi\vartheta}\right)^{1/2} e^{\frac{-1}{2\vartheta}(\chi-\mu)^2}$$

$$\log f(\chi,\vartheta) = -\frac{1}{2}\log(2\pi\vartheta) - \frac{1}{2\vartheta}(\chi-\mu)^2$$

$$\frac{\partial \log f(\chi,\vartheta)}{\partial\vartheta} = -\frac{1}{2\vartheta} + \frac{1}{2\vartheta^2}(\chi-\mu)^2$$

$$\frac{\partial^2 \log f(\chi,\vartheta)}{\partial\vartheta^2} = \frac{1}{2\vartheta^2} - \frac{1}{\vartheta^3}(\chi-\mu)^2$$

Άρα, $\mathrm{I}(\vartheta) = -\mathrm{E}\left(\frac{1}{2\vartheta^2} - \frac{1}{\vartheta^3}(\chi-\mu)^2\right) = -\frac{1}{2\vartheta^2} + \frac{\vartheta}{\vartheta^3} = \frac{1}{2\vartheta^2}$

Συνεπώς το κάτω φράγμα της Gramer-Rao είναι ίσο με $\frac{1}{n}2\vartheta^2$ (1)

Αμερόληπτη εκτιμήτρια για το ϑ είναι το S^2 $(*)$

η οποία έχει διακύμανση $\mathrm{var}(S^2) = \frac{2\vartheta^2}{n-1}$ (2)

Όμως (1)$\neq$(2) $\Rightarrow$ η $(*)$ δεν είναι Α.Ο.Ε.Δ..

Θεωρούμε τώρα τον εκτιμητή $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{X}_i-\mu)^2$ $(**)$

ο οποίος είναι αμερόληπτος.

$$\frac{\mathrm{X}_i-\mu}{\sqrt{\vartheta}} \sim \mathrm{N}(0,1) \Rightarrow \frac{(\mathrm{X}_i-\mu)^2}{\vartheta} \sim X_1^2 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}\frac{(\mathrm{X}_i-\mu)^2}{\vartheta} \sim X_n^2$$

Άρα $\mathrm{var}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{X}_i-\mu)^2}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\vartheta^2 2n = \frac{2\vartheta^2}{n}$ (3)

Παρατηρούμε ότι (3)=(2) $\Rightarrow$ η $(**)$ είναι Α.Ο.Ε.Δ.

Σχετική Αποτελεσματικότητα

Έστω U ΑΟ.Ε.Δ. εκτιμήτρια του $g(\vartheta)$ και T οποισδήποτε άλλος αμερόληπτος εκτιμητής του $g(\vartheta)$. Τότε η σχετική αποτελεσματικότητα του T ως προς U είναι $\frac{\operatorname{var}(U)}{\operatorname{var}(T)}$

Παράδειγμα 1:

Έστω, $T = \frac{X_1 + 2X_2 + X_3}{4}$

$U = \overline{X}$

και X_1, X_2, X_3 τυχαίο δείγμα με $\operatorname{var}(X_i) = \sigma^2$

Άρα $\operatorname{var}(T) = \frac{3}{8}\sigma^2$ και $\operatorname{var}(U) = \frac{1}{3}\sigma^2$.

Τότε η σχετική αποτελεσματικότητα του T ως προς U είναι $\frac{\operatorname{var}(U)}{\operatorname{var}(T)} = \frac{\frac{1}{3}\sigma^2}{\frac{3}{8}\sigma^2} = \frac{8}{9}$.

Θεώρημα :

Έστω $X_1, \ldots, X_n$ τυχαίο δείγμα $\sim f(\chi, \vartheta)$ και

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta} \log \prod_{i=1}^{n} f(\chi_i, \vartheta) = K(\vartheta, n)\left(U(X_1, \ldots, X_n) - g(\vartheta)\right)$$

Άρα η U είναι Α.Ο.Ε.Δ. για την $g(\vartheta)$.

Παράδειγμα 1

$X_1, \ldots, X_n \sim f(\chi, \vartheta) = \frac{\chi + 1}{\vartheta(\vartheta + 1)} e^{-\chi/\vartheta}$, $\chi > 0$

α) Να βρεθεί Α.Ο.Ε.Δ. για το $g(\vartheta) = \frac{\vartheta(1 + 2\vartheta)}{1 + \vartheta}$.

$$\prod_{i=1}^{n} f(\chi_i, \vartheta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{(\chi_i + 1)}{\vartheta(\vartheta + 1)} e^{-\chi_i/\vartheta} =$$