Σχετική Αποτελεσματικότητα

Έστω U Α.Ο.Ε.Δ. εκτιμήτρια του $g(\vartheta)$ και T οποιοσδήποτε άλλος αμερόληπτος εκτιμητής του $g(\vartheta)$. Τότε η σχετική αποτελεσματικότητα του T ως προς U είναι $\frac{\operatorname{var}(U)}{\operatorname{var}(T)}$

Παράδειγμα 1:

Έστω, $T=\frac{X_1+2X_2+X_3}{4}$

$U=\overline{X}$

και X_1, X_2, X_3 τυχαίο δείγμα με $\operatorname{var}(X_i)=\sigma^2$

Άρα $\operatorname{var}(T)=\frac{3}{8}\sigma^2$ και $\operatorname{var}(U)=\frac{1}{3}\sigma^2$.

Τότε η σχετική αποτελεσματικότητα του T ως προς U είναι $\frac{\operatorname{var}(U)}{\operatorname{var}(T)}=\frac{\frac{1}{3}\sigma^2}{\frac{3}{8}\sigma^2}=\frac{8}{9}$.

Θεώρημα :

Έστω $X_1,\ldots,X_n$ τυχαίο δείγμα $\sim f(\chi,\vartheta)$ και

$$\frac{\partial}{\partial\vartheta}\log\prod_{i=1}^{n} f(\chi_i,\vartheta)=K(\vartheta,n)\big(U(X_1,\ldots,X_n)-g(\vartheta)\big)$$

Άρα η U είναι Α.Ο.Ε.Δ. για την $g(\vartheta)$.

Παράδειγμα 1

$X_1,\ldots,X_n \sim f(\chi,\vartheta)=\frac{\chi+1}{\vartheta(\vartheta+1)}e^{-\chi/\vartheta}$, $\chi>0$

Α) Να βρεθεί Α.Ο.Ε.Δ. για το $g(\vartheta)=\frac{\vartheta(1+2\vartheta)}{1+\vartheta}$.

$$\prod_{i=1}^{n} f(\chi_i,\vartheta)=\prod_{i=1}^{n}\frac{(\chi_i+1)}{\vartheta(\vartheta+1)}e^{-\chi_i/\vartheta}=\frac{1}{\vartheta^n(1+\vartheta)^n}e^{-\sum_{i=1}^{n}\chi_i/\vartheta}\prod_{i=1}^{n}(\chi_i+1)$$

$$\log\left\{\prod f(\chi_i\vartheta)\right\}=\sum_{i=1}^{n}\log(\chi_i+1)-n\log\vartheta-n\log(1+\vartheta)-\frac{\sum_{i=1}^{n}\chi_i}{\vartheta}$$

$$\frac{\partial}{\partial\vartheta}\log\left\{\prod f(\chi_i\vartheta)\right\}=-\frac{n}{\vartheta}-\frac{n}{1+\vartheta}+\frac{\sum_{i=1}^{n}\chi_i}{\vartheta^2}=-\frac{n\vartheta(1+2\vartheta)}{\vartheta^2(1+\vartheta)}+\frac{n\sum_{i=1}^{n}\chi_i}{\vartheta^2}$$

$$=\frac{n}{\vartheta^2}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\chi_i}{n}-g(\vartheta)\right)=\kappa(\vartheta,n)\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\chi_i}{n}-g(\vartheta)\right)$$

Άρα, από το θεώρημα, η $\overline{\mathrm{X}}$ είναι Α.Ο.Ε.Δ. για το $g(\vartheta)$

Β) Να υπολόγιστει Α.Ο.Ε.Δ. για το $g^*(\vartheta) = \dfrac{(3+2\vartheta)(2+\vartheta)}{1+\vartheta}$.

$g^*(\vartheta) = g(\vartheta) = 6$

Α.Ο.Ε.Δ για το $g^*(\vartheta) = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} \chi_i}{n} + 6$.

Επάρκεια
Μια στατιστική συνάρτηση ονομάζεται επαρκής για την παράμετρο ϑ, αν όλη η πληροφορία από το δείγμα γι΄αύτην τη παράμετρο περιέχεται σ΄αυτήν τη συνάρτηση.

Επάρκεια Fisher
Μια στατιστική συνάρτηση U λέγεται επαρκής για την παράμετρο ϑ, αν η $P\left(\underset{\sim}{\mathrm{X}}=\underset{\sim}{\chi} \,/\, U\left(\underset{\sim}{\chi}\right)\right)$ είναι ανεξάρτητη του ϑ.

Παράδειγμα 1
$\mathrm{X}_1,\cdots \mathrm{X}_n \sim Bernoulli(\vartheta)$

$$P\left(\mathrm{X}_1=\chi_1,\cdots \mathrm{X}_n=\chi_n \,/\, \sum_{i=1}^{n}\mathrm{X}_i=t\right)=\frac{P\left(\underset{\sim}{\mathrm{X}}=\underset{\sim}{\chi}\,,\,\sum_{i=1}^{n}\mathrm{X}_i=t\right)}{P\left(\sum_{i=1}^{n}\mathrm{X}_i=t\right)}=\frac{P\left(\underset{\sim}{\mathrm{X}}=\underset{\sim}{\chi}\right)}{P\left(\sum_{i=1}^{n}\mathrm{X}_i=t\right)}$$

$$=\frac{\prod_{i=1}^{n}P(\mathrm{X}_i=\chi_i)}{P\left(\sum_{i=1}^{n}\mathrm{X}_i=t\right)}=\frac{\vartheta^{\sum \mathrm{X}_i}(1-\vartheta)^{n-\sum \mathrm{X}_i}}{\binom{n}{t}\vartheta^{\sum \mathrm{X}_i}(1-\vartheta)^{n-\sum \mathrm{X}_i}}=\frac{1}{\binom{n}{t}}$$ η οποία είναι ανεξάρτητη του ϑ

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n}\mathrm{X}_i$ επαρκής στατιστική συνάρτηση.

Παρατηρήσεις

1. Αν η U είναι επαρκής, τότε και η $U+c$ είναι επαρκής, όπου το c είναι μια σταθερά.
2. Το δείγμα είναι πάντα επαρκές για το ϑ.
   $P\left(\underset{\sim}{\mathrm{X}}=\underset{\sim}{\chi} \,/\, \underset{\sim}{\mathrm{X}}=\underset{\sim}{\chi}\right)=1$, ανεξάρτητο του ϑ.

Θεώρημα: Παραγοντοποίηση Neyman-Fisher
$\mathrm{X}_1,\cdots \mathrm{X}_n \sim f(\chi,\vartheta)$

T επαρκής για τη ϑ **αν και μόνο αν** $\prod_{i=1}^{n} f(\chi_i,\vartheta)=g(T,\vartheta)\,h(\chi_1,\cdots,\chi_n)$.

Παράδειγμα1
$\mathrm{X}_1,\cdots \mathrm{X}_n \sim \mathrm{P}_0(\vartheta)$

$$\prod_{i=1}^{n}\frac{e^{-\vartheta}\vartheta^{\chi_i}}{\chi_i!}=\frac{e^{-n\vartheta}\vartheta^{\sum \chi_i}}{\prod_{i=1}^{n}\chi_i!}=e^{-n\vartheta}\vartheta^{\sum_{i=1}^{n}\chi_i}\;\frac{1}{\prod_{i=1}^{n}\chi_i!}$$

από το θεώρημα παραγοντοποίησης $\Rightarrow$ $T=\sum_{i=1}^{n}\chi_i$ είναι επαρκής στατιστική συνάρτηση.

Παράδειγμα2

$X_1,\cdots X_n \sim N(\mu,\sigma^2)$

$$\prod_{i=1}^{n} f(\chi_i,\mu,\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-1/2\sigma^2\,(\chi_i-\mu)^2}=\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-1/2\sigma^2\sum_{i=1}^{n}(\chi_i-\mu)^2}$$

$$=\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left\{\sum_{i=1}^{n}\chi_i^2-2\mu\sum_{i=1}^{n}\chi_i+n\mu^2\right\}}=\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{n\mu^2}{2\sigma^2}-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\chi_i^2+\frac{\mu}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\chi_i}$$

<u>1η περίπτωση</u>

σ^2 γνωστό και μ άγνωστο. Αν $T=\sum_{i=1}^{n}X_i$, τότε

$g\left(\sum\chi_i,\mu\right)=\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{n\mu^2}{2\sigma^2}}\,e^{\frac{\mu}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\chi_i}$ και $h(\chi_1,\cdots,\chi_n)=e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum\chi_i^2}$ άρα

$\Rightarrow$ θεώρημα παραγοντοποίησης $\sum_{i=1}^{n}\chi_i$ είναι επαρκής για το μ.

<u>2η περίπτωση</u>

σ^2 άγνωστο και μ γνωστό. Η επαρκής στατιστική συνάρτηση δίνεται από την $\underset{\sim}{T}=\left(\sum X_i,\sum X_i^2\right)=(T_1,T_2)$, όπου $g(T_1,T_2)=\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{n\mu^2}{2\sigma^2}\;-\frac{1}{2\sigma^2}\sum\chi_i^2+\frac{\mu}{\sigma^2}\sum\chi_i}$ και $h(\chi_1,\cdots,\chi_n)=1$.

Επίσης η στατιστική συνάρτηση $\sum(\chi_i-\mu)^2$ είναι επαρκής για το σ^2, αλλά και αυτή μπορεί να γραφτεί σαν συνάρτηση των $\sum X_i$, $\sum X_i^2$.

<u>3η περίπτωση</u>

σ^2, μ είναι γνωστά. Η επαρκής στατιστική συνάρτηση για το (μ,σ^2) δίνεται από την $\underset{\sim}{T}=\left(\sum X_i,\sum X_i^2\right)=(T_1,T_2)$ όπου $g(T_1,T_2)=\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{n\mu^2}{2\sigma^2}\;-\frac{1}{2\sigma^2}\sum\chi_i^2+\frac{\mu}{\sigma^2}\sum\chi_i}$ και $h(\chi_1,\cdots,\chi_n)=1$.

<u>Παρατηρήσεις</u>

1. Αν m η διάσταση της στατιστικής συνάρτησης και r η διάσταση του ϑ $\Rightarrow$ $m\geq r$.
2. Αν η T επαρκής για το ϑ και g^* είναι αμφιμονοσήμαντη και επί $\Rightarrow$ $g^*(T)$ είναι επαρκής για το ϑ.

Παράδειγμα3

$$\mathrm{X}_1,\cdots\mathrm{X}_n \sim f(\chi,\vartheta)=\frac{1}{\vartheta} \quad , \; 0\le\chi\le\vartheta$$

$$\prod_{i=1}^{n} f(\chi_i,\vartheta)= \begin{cases} \frac{1}{\vartheta^n}, & 0\le\chi_i\le\vartheta \quad \forall i \\ 0, & \text{αλλοίως} \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{\vartheta^n}, & 0\le\min\chi_i\le\max\chi_i\le\vartheta \\ 0, & \text{αλλοίως} \end{cases}$$

$$=\frac{1}{\vartheta^n}\mathbb{1}_{[0\le\min\chi_i\le\max\chi_i\le\vartheta]}(\chi_1,\cdots,\chi_n)$$

$$=\frac{1}{\vartheta^n}\mathbb{1}_{[0\le\min\chi_i]}(\chi_1,\cdots,\chi_n)\mathbb{1}_{[\max\chi_i\le\vartheta]}(\chi_1,\cdots,\chi_n)$$

όπου $g(\max\chi_i,\vartheta)=\frac{1}{\vartheta^n}\mathbb{1}_{[\max\chi_i\le\vartheta]}(\chi_1,\cdots,\chi_n)$ και $h(\chi_1,\cdots,\chi_n)=\mathbb{1}_{[0\le\min\chi_i]}(\chi_1,\cdots,\chi_n)$

άρα από το θεώρημα παραγοντοποίησης έχουμε ότι $T=\max\mathrm{X}_i$ είναι επαρκής για το ϑ.

Κατανομή Beta(α,β)

Ας υποθέσουμε ότι,

$$\mathrm{X}_1\sim G(\alpha,1)$$
$$\mathrm{X}_2\sim G(\beta,1)$$
$$\mathrm{X}_1\perp\mathrm{X}_2$$

Η από κοινου συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των $\mathrm{X}_1,\mathrm{X}_2$ είναι η $f(\chi_1,\chi_2)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\chi_1^{\alpha-1}\;\chi_2^{\beta-1}\;e^{-\chi_1-\chi_2}\quad ,\quad \chi_1,\chi_2>0$.

Έστω

$$\begin{aligned}\mathrm{Y}_1&=\mathrm{X}_1+\mathrm{X}_2\\ \mathrm{Y}_2&=\frac{\mathrm{X}_1}{\mathrm{X}_1+\mathrm{X}_2}\end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned}\mathrm{X}_1&=\mathrm{Y}_1\mathrm{Y}_2\\ \mathrm{X}_2&=\mathrm{Y}_1(1-\mathrm{Y}_2)\end{aligned}$$

θα δείξω ότι οι $\mathrm{Y}_1,\mathrm{Y}_2$ είναι ανεξάρτητες.

$$J=\begin{vmatrix} \partial\chi_1/\partial\psi_1 & \partial\chi_1/\partial\psi_2 \\ \partial\chi_2/\partial\psi_1 & \partial\chi_2/\partial\psi_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \psi_2 & \psi_1 \\ 1-\psi_2 & -\psi_1 \end{vmatrix}=-\psi_1$$

πεδίο ορισμού :

$$\left.\begin{matrix}\chi_1>0\\ \chi_2>0\end{matrix}\right\}\Rightarrow \left.\begin{matrix}\psi_1\psi_2>0\\ \psi_1(1-\psi_2)>0\end{matrix}\right\}\Rightarrow \begin{matrix}\psi_1>0\\ 0<\psi_2<1\end{matrix}$$

$$f(\psi_1,\psi_2)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\ (\psi_1\psi_2)^{\alpha-1}\ [\psi_1(1-\psi_2)]^{\beta-1}\ e^{-\psi_1}\quad,\qquad \psi_1>0\quad,\quad \psi_2\in(0,1)$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\ \psi_2^{\alpha-1}\ (1-\psi_2)^{\beta-1}\ \psi_1^{\alpha+\beta-1}\ e^{-\psi_1}$$

$$=\boldsymbol{\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\ \psi_2^{\alpha-1}\ (1-\psi_2)^{\beta-1}}\qquad \frac{\psi_1^{\alpha+\beta-1}e^{-\psi_1}}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

$\Downarrow$

κατανομή Beta

$$\mathrm{Y}_2\sim Beta(\alpha,\beta)$$

$$\mathrm{E}(\mathrm{Y}_2)=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\qquad \text{και}\qquad \mathrm{var}(\mathrm{Y}_2)=\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)}$$

$$\mathrm{E}(\Psi_2)=\int_0^\infty \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma[\beta]}\ \psi_2^{\alpha+1-1}\ (1-\psi_2)^{\beta-1}d\psi_2$$

ξέρω ότι $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma[\beta]}\ \psi_2^{\alpha-1}\ (1-\psi_2)^{\beta-1}d\psi_2=1$

$$\Rightarrow\int_0^1 \psi_2^{\alpha-1}\ (1-\psi_2)^{\beta-1}d\psi_2=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\ .$$

<u>Διατεταγμένη Στατιστική Συνάρτηση</u>

$$\mathrm{X}_1,\cdots,\mathrm{X}_n\sim f(\chi)$$

$$\min_i \mathrm{X}_i=\Psi_1<\Psi_2<\cdots<\Psi_n$$

Η από κοινού κατανομή των $(\Psi_1,\cdots,\Psi_n)$ είναι η $g(\psi_1,\cdots,\psi_n)=n!\ f(\psi_1)\cdots f(\psi_n)$ όπου $\psi_1<\cdots<\psi_n$.

$$G_{\Psi_n}(\psi_n)=\mathrm{P}(\Psi_n\le\psi_n)=\mathrm{P}(\mathrm{X}_1\le\psi_n\cap \mathrm{X}_2\le\psi_n\cap\cdots\cap \mathrm{X}_n\le\psi_n)$$

$$=\prod_{i=1}^m \mathrm{P}(\mathrm{X}_i\le\psi_n)=\prod_{i=1}^n F_{\mathrm{X}}(\psi_n)=\{F_{\mathrm{X}}(\psi_n)\}^n$$

$$g_{\Psi_n}(\psi_n)=n\{F_{\mathrm{X}}(\psi_n)\}^{n-1}f_{\mathrm{X}}(\psi_n)$$

$$G_{\Psi_1}(\psi_1)=\mathrm{P}(\Psi_1\le\psi_1)=1-\mathrm{P}(\Psi_1>\psi_1)=1-\mathrm{P}(\mathrm{X}_1>\psi_1\cap \mathrm{X}_2>\psi_1\cap\cdots\cap \mathrm{X}_n>\psi_1)$$

$$=1-\prod_{i=1}^n \mathrm{P}(\mathrm{X}_i>\psi_i)=1-\prod_{i=1}^n(1-F_{\mathrm{X}}(\psi_i))=1-(1-F_{\mathrm{X}}(\psi_1))^n$$

$$g_{\Psi_1}(\psi_1)=n\{F_{\mathrm{X}}(\psi_1)\}^{n-1}f_{\mathrm{X}}(\psi_1)$$

$$g_{\Psi_k}(\psi_k)=\frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!\,1!}\{F_{\mathrm{X}}(\psi_k)\}^{k-1}\,(1-F_{\mathrm{X}}(\psi_k))^{n-k}\,f_{\mathrm{X}}(\psi_k)\ .$$

<u>Θεώρημα Rao-Blackwell</u>

Έστω U αμερόληπτη για το ϑ και T μια επαρκής στατιστική συνάρτηση. Θεωρώ $U^* = \mathrm{E}(U / T)$. Τότε :

1. U^* είναι αμερόληπτη
2. $\operatorname{var}(U^*) \le \operatorname{var}(U)$

<u>Απόδειξη:</u>

1. $\mathrm{E}(U^*) = \mathrm{E}\{\mathrm{E}(U / T)\} = \mathrm{E}(U) = \vartheta \quad \Rightarrow \quad U^*$ είναι αμερόληπτη.

2. $\operatorname{var}(U) = \operatorname{var}\{\, \mathrm{E}(U / T)\,\} + \mathrm{E}\{\, \operatorname{var}(U / T)\,\} = \operatorname{var}(U^*) + \mathrm{E}\{\, \underbrace{\operatorname{var}(U / T)}_{>0}\,\}$

$\Rightarrow \operatorname{var}(U^*) \le \operatorname{var}(U)$ και η ισότητα ισχύει όταν $\operatorname{var}(U / T) = 0 \;\Rightarrow\; U = g(T)$.

<u>Παράδειγμα1</u>

$\mathrm{X}_1, \cdots, \mathrm{X}_n \sim Bernoulli(\vartheta)$

Θέλω να εκτιμήσω την παράμετρο ϑ.

Ένας αμερόληπτος εκτιμητής του ϑ είναι ο $U = \mathrm{X}_1$.

$\mathrm{E}(U) = \mathrm{E}(\mathrm{X}_1) = \vartheta$

$\operatorname{var}(U) = \operatorname{var}(\mathrm{X}_1) = \vartheta(1-\vartheta)$

Για να βρώ T επαρκή, έχω $\prod_{i=1}^{n} f(\chi_i, \vartheta) = \prod_{i=1}^{n} \vartheta^{\chi_i} (1-\vartheta)^{1-\chi_i}$

$$= \underbrace{\vartheta^{\sum \chi_i} (1-\vartheta)^{n-\sum \chi_i}}_{g(T,\vartheta)} \qquad \underbrace{\mathbf{1}}_{h(\chi_1, \cdots, \chi_n)}$$

Από το παραγοντικό θεώρημα, το $\sum \chi_i$ είναι επαρκής στατιστική συνάρτηση. Από το θεώρημα Rao-Blackwell,

$$U^* = \mathrm{E}(U / T) = \mathrm{E}\left(\mathrm{X}_1 / \sum \mathrm{X}_i\right) = 1 \cdot \mathrm{P}\left(\mathrm{X}_1 = 1 / \sum \mathrm{X}_i = t\right) + 0 \cdot \mathrm{P}\left(\mathrm{X}_1 = 0 / \sum \mathrm{X}_i = t\right)$$

$$= \frac{\mathrm{P}\left(\mathrm{X}_1 = 1, \sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i = t\right)}{\mathrm{P}\left(\sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i = t\right)} = \frac{\mathrm{P}\left(\mathrm{X}_1 = 1, \sum_{i=2}^{n} \mathrm{X}_i = t-1\right)}{\mathrm{P}\left(\sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i = t\right)} = \frac{\mathrm{P}(\mathrm{X}_1 = 1)\,\mathrm{P}\left(\sum_{i=2}^{n} \mathrm{X}_i = t-1\right)}{\mathrm{P}\left(\sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i = t\right)}$$

$$= \frac{\vartheta \binom{n-1}{t-1} \vartheta^{t-1} (1-\vartheta)^{n-t}}{\binom{n}{t} \vartheta^{t} (1-\vartheta)^{n-t}} = \frac{t}{n} \;.$$

Άρα $U^* = \overline{\mathrm{X}}$ και παρατηρώ ότι $\operatorname{var}(U^*) = \dfrac{\vartheta(1-\vartheta)}{n}$.

Άρα έχω ελαττώσει τη διακύμανση στην τάξη του $\dfrac{1}{n}$.

<u>Πληρότητα</u>

Έχουμε τυχαίο δείγμα τέτοιο ώστε $X_1,\cdots,X_n \sim f(\chi,\vartheta)$. Η στατιστική συνάρτηση T λέγεται πλήρης **αν και μόνον αν** $E(h(T))=0 \quad \forall\vartheta \quad \Rightarrow \quad h(T)=0$ σχεδόν παντού.

<u>Παράδειγμα1</u>

$X_1,\cdots,X_n \sim P_0(\vartheta)$

$T=\sum_{i=1}^{n} X_i \quad , \quad T \sim P_0(n\vartheta)$

$$
\begin{aligned}
E\{h(T)\}=0 \quad &\Rightarrow \quad \sum_{t=0}^{\infty} h(t)\frac{e^{-n\vartheta}(n\vartheta)^t}{t!}=0 \qquad ,\forall\vartheta \\
&\Rightarrow h(0)+h(1)\frac{n\vartheta}{1!}+h(2)\frac{(n\vartheta)^2}{2!}+\cdots=0 \qquad , \ \forall\vartheta \\
&\Rightarrow h(0)=h(1)=h(2)=\cdots=0 \\
&\Rightarrow h(T)=0
\end{aligned}
$$

Άρα η στατιστική συνάρτηση $T=\sum_{i=1}^{n} X_i$ είναι πλήρης .

<u>Παράδειγμα2</u>

T στατιστική συνάρτηση , $T \sim U(0,\vartheta)$

$$
\begin{aligned}
E(h(T))=0 &\Rightarrow \int_0^{\vartheta} h(T)\frac{1}{\vartheta}dt=0 \qquad ,\forall\vartheta \\
&\Rightarrow \int_0^{\vartheta} h(T)dt=0 \qquad ,\forall\vartheta
\end{aligned}
$$

Άφου σε κάθε ανοικτό διάστημα $(0,\vartheta)$ το ολοκλήρωμα της h ως προς t είναι ίσο με το 0 $\Rightarrow h(T)=0$. Άρα η στατιστική συνάρτηση είναι πλήρης.

<u>Παράδειγμα3</u>

$T \sim U(-\vartheta,\vartheta)$ τότε η T δεν είναι πλήρης στατιστική συνάρτηση, γιατί αν $h(T)=T$

$$E(h(T))=E(T)\int_{-\vartheta}^{\vartheta} t\,\frac{1}{2\vartheta}dt=0 \qquad ,\forall\vartheta .$$

<u>Παράδειγμα4</u>

Αν $X_1,\cdots,X_n \sim N(\mu,\sigma^2)$, μπορεί να αποδειχθεί :

1. σ^2 γνωστό $\Rightarrow$ $\overline{X}$ πλήρης
2. μ γνωστό $\Rightarrow$ $\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$ πλήρης
3. μ ,σ^2 άγνωστα $\Rightarrow (\overline{X},S^2)$ πλήρης.

<u>Θεώρημα Lehmann-Scheffé</u>

$X_1,\cdots,X_n \sim f(\chi,\vartheta)$

T επαρκής και πλήρης στατιστική συνάρτηση για το $g(\vartheta)$

$U^* = U(T)$ αμερόληπτη για το $g(\vartheta)$.

$\Rightarrow$ U^* μοναδική Α.Ο.Ε.Δ. για το $g(\vartheta)$.

<u>Παράδειγμα1</u>

$X_1,\cdots,X_n \sim P_0(\vartheta)$

1. Να βρεθεί η Α.Ο.Ε.Δ. για τη ϑ.

$T=\sum_{i=1}^{n} X_i$ επαρκής και πλήρης, $T \sim P_0(n\vartheta) \Rightarrow$ $E(T)=n\vartheta$ $\Rightarrow E\left(\frac{T}{n}\right)=\vartheta$ άρα από το θεώρημα Lehmann-Scheffé $\Rightarrow$ $\overline{X}$ είναι Α.Ο.Ε.Δ. .

2. Να βρεθεί η Α.Ο.Ε.Δ. για τη ϑ^2.

$$\operatorname{var}(T)=n\vartheta \Rightarrow E(T^2)-E^2(T)=n\vartheta \Rightarrow E(T^2)-n^2\vartheta^2=n\vartheta \Rightarrow E\left\{\frac{(T^2-T)}{n^2}\right\}=\vartheta^2$$

Άρα η $\frac{(T^2-T)}{n^2}$ είναι Α.Ο.Ε.Δ. για τη ϑ^2.

<u>Παράδειγμα2</u>

$X_1,\cdots,X_n \sim f(\chi,\vartheta)=e^{-(\chi-\vartheta)}$, $\vartheta \le \chi$

Αναζητώ Α.Ο.Ε.Δ. για τη ϑ.

<u>Επάρκεια</u> $\prod_{i=1}^{n} f(\chi_i,\vartheta)=\prod_{i=1}^{n} e^{-(\chi_i-\vartheta)}\ 1_{[\vartheta\le\chi_i]}=e^{-\left(\sum\chi_i-n\vartheta\right)}\ 1_{\vartheta\le\min X_i}$

$$=\underbrace{e^{n\vartheta}\ 1_{\vartheta\le\min X_i}}_{g(T,\vartheta)}\cdot\underbrace{e^{-\sum\chi_i}}_{h(X_1,\cdots,X_n)}$$

<u>Πληρότητα</u>

Αναζητώ την κατανομή του $T=\min X_i$

$f_T(t)=n[1-F_X(t)]^{n-1} f_X(t)=n\,e^{-n(t-\vartheta)}$, $\vartheta \le t$

$E\{h(T)\}=0 \Rightarrow \int_0^\infty h(T)\,n\,e^{-n(t-\vartheta)}\,dt=0$, $\forall\vartheta$

θέτουμε $t-\vartheta=w$ $\Rightarrow$ $\int_0^\infty h(w+\vartheta)\,e^{-nw}\,dw=0$, $\forall\vartheta$

$\Rightarrow$ $h=0$

Άρα η T είναι επαρκής και πλήρης στατιστική συνάρτηση.

$E(T)=\int_\vartheta^\infty t\cdot n\cdot e^{-n(t-\vartheta)}\,dt=\vartheta+\frac{1}{n}$. Άρα $E\left(T-\frac{1}{n}\right)=\vartheta$ και συνεπώς η $T-\frac{1}{n}$ είναι Α.Ο.Ε.Δ. για τη ϑ .

Παρατήρηση
Όταν ορίζεται η επάρκεια και η πληρότητα τότε εννοείται για οικογένεια κατανομών.

Παράδειγμα1
$X_1, \cdots X_n \sim P_0(\vartheta)$

$\vartheta = 1 \quad P_0(1) = \dfrac{e^{-1}}{\chi!}$

$\vartheta = 2 \quad P_0(2) = \dfrac{e^{-2}\ 2^{\chi}}{\chi!}$

$T = \sum X_i$ είναι επαρκής και πλήρης για την οικογένεια κατανομών της Poisson.

Α.Ο.Ε.Δ. εκτιμήτριες

Παράδειγμα1
$X_1, \cdots X_n \sim N(\vartheta, 1)$

Αναζητώ Α.Ο.Ε.Δ. εκτιμήτρια της $P(X_1 \le c)$.

Η πιο απλή αμερόληπτη εκτιμήτρια δίνεται από την $U = \begin{cases} 1 & ,\chi_1 \le c \\ 0 & ,\chi_1 \ge c \end{cases}$, $E(U) = P(X_1 \le c)$.

Επιπλέον η $\overline{X}$ είναι πλήρης και επαρκής για την $N(\vartheta, 1)$.

Από το θεώρημα Rao-Blackwell, $E(U / \overline{X}) = P(X_1 \le c / \overline{X})$, άρα πρέπει να υπολογίσω την $X_1 / \overline{X}$. Όμως η από κοινού κατανομή των $(X_1, \overline{X})$ είναι διδιάστατη κανονική με μέση τιμή $\begin{pmatrix} \vartheta \\ \vartheta \end{pmatrix}$ και πίνακα διακυμάνσεων $\begin{bmatrix} 1 & 1/n \\ 1/n & 1/n \end{bmatrix}$, $\operatorname{cov}(X_1, \overline{X}) = 1/n$.

Άρα $\rho = \dfrac{\operatorname{cov}(X_1, \overline{X})}{\sqrt{\operatorname{var}(X_1)}\ \sqrt{\operatorname{var}(\overline{X})}} = \dfrac{1/n}{\sqrt{1}\ \sqrt{1/n}} = 1/\sqrt{n}$

Από τις ιδιότητες της διδιάστατης κανονικής, η κατανομή της $X_1 / \overline{X}$ είναι κανονική.

$$E(X_1 / \overline{X}) = \mu_X + \rho \frac{\sigma_{X_1}}{\sigma_{\overline{X}}}(\overline{X} - \mu_{X_1}) = \vartheta + \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}(\overline{X} - \vartheta) = \overline{X}$$

$$\operatorname{var}(X_1 / \overline{X}) = \sigma^2_{X_1}(1 - \rho^2) = 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{n-1}{n}$$

άρα $X_1 / \overline{X} \sim N\left(\overline{X}, \dfrac{n-1}{n}\right)$.

$$P(X_1 \le c / \overline{X}) = P\left(\frac{X_1 - \overline{X}}{\sqrt{\frac{n-1}{n}}} \le \frac{c - \overline{X}}{\sqrt{\frac{n-1}{n}}} / \overline{X}\right) = \Phi\left(\frac{c - \overline{X}}{\sqrt{\frac{n-1}{n}}}\right)$$

Άρα η Α.Ο.Ε.Δ. για την $P(X_1 \le c)$ είναι η $\dfrac{c - \overline{X}}{\sqrt{n - 1/n}}$.

Σημείωση

Αν αναζητώ Α.Ο.Ε.Δ. εκτιμήτρια για την $\mathrm{P}(c_1 \le \mathrm{X} \le c_2)$, θα πάρω $U = \begin{cases} 0 & , \alpha\lambda\lambda o\upsilon \\ 1 & , c_1 \le \mathrm{X} \le c_2 \end{cases}$.

Παράδειγμα

$$\mathrm{X}_1, \cdots \mathrm{X}_n \sim \mathrm{E}(\vartheta) = G\left(1, \frac{1}{\vartheta}\right)$$

$$f(\chi, \vartheta) = \vartheta\, e^{-\vartheta\, \chi}$$

1. Αναζητώ Α.Ο.Ε.Δ. εκτιμήτρια του $\frac{1}{\vartheta}$.

Επάρκεια

$$\prod_{i=1}^{\vartheta} f(\chi_i, \vartheta) = \prod_{i=1}^{n} \vartheta\, e^{-\vartheta\, \chi_i} = \vartheta^n e^{-\vartheta \sum_{i=1}^{n} \chi_i} \cdot 1$$, με $T = \sum \mathrm{X}_i$.

Τότε από το παραγοντικό θεώρημα, $T = \sum \mathrm{X}_i$ είναι επαρκής . $T \sim G\left(\alpha = n, \beta = \frac{1}{\vartheta}\right)$.

Πληρότητα

$$\int_0^\infty h(t)\, f_T(t)\, dt = 0 \Rightarrow \int_0^\infty h(t) \frac{\vartheta^n}{\Gamma(n)}\, e^{-t\vartheta}\, t^{n-1}\, dt = 0 \overset{g(t)=h(t)t^{n-1}}{\Longrightarrow} \int_0^\infty g(t)\, e^{-t\vartheta}\, dt = 0 \quad , \forall \vartheta$$

$$\Rightarrow h(t) t^{n-1} = 0 \quad \forall \vartheta \Rightarrow h(t) = 0 .$$

Άρα η $T = \sum \mathrm{X}_i$ είναι επαρκής και πλήρης στατιστική συνάρτηση.

$$\mathrm{E}(T) = \mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i\right) = n\mathrm{E}(\mathrm{X}_i) = \frac{n}{\vartheta} \Rightarrow \mathrm{E}\left(\frac{T}{n}\right) = \frac{1}{\vartheta} .$$

Η $\overline{\mathrm{X}}$ είναι η Α.Ο.Ε.Δ. του $\frac{1}{\vartheta}$.

2. Αναζητώ Α.Ο.Ε.Δ. του ϑ .

$$\mathrm{E}\left(\frac{1}{T}\right) = \int_0^\infty \frac{1}{t} \frac{\vartheta^n}{\Gamma(n)}\, e^{-t\vartheta}\, t^{n-1}\, dt = \frac{\vartheta^n}{\Gamma(n)} \int_0^\infty t^{n-2}\, e^{-t\vartheta}\, dt = \frac{\vartheta^n}{\Gamma(n)} \frac{\Gamma(n-1)}{\vartheta^{n-1}} = \frac{\vartheta}{n-1} .$$

Άρα $\mathrm{E}\left(\frac{1}{T}\right) = \frac{\vartheta}{n-1} \Rightarrow \mathrm{E}\left(\frac{n-1}{T}\right) = \vartheta$.

Α.Ο.Ε.Δ. εκτιμήτρια του ϑ είναι η $\frac{n-1}{T}$.

Σύγκλιση κατά Πιθανότητα

Η ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $\{\mathrm{X}_n\}_{n\in N}$ συγκλίνει κατά πιθανότητα στη σταθερά c αν και μόνον αν, $\forall\, \varepsilon > 0$, $\mathrm{P}\left(\left|\mathrm{X}_n - c\right| > \varepsilon\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Συμβολισμός: $\mathrm{X}_n \xrightarrow{p} c$

Ασθενής Νόμος των Μεγάλων Αριθμών

Έστω $\mathrm{X}_1,\cdots \mathrm{X}_n$ τυχαίο δείγμα από κατανομή με $\mathrm{E}(\mathrm{X}_i) = \mu < \infty$. Τότε $\forall\, \varepsilon > 0$ $\mathrm{P}\left(\left|\overline{\mathrm{X}} - \mu\right| > \varepsilon\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

Συμβολισμός: $\overline{\mathrm{X}} \xrightarrow{p} \mu$

Ασθενής Συνέπεια

Η ακολουθία εκτιμητριών $\{T_n\}_{n\in N}$ είναι συνεπής για την παράμετρο ϑ αν και μόνον αν $T_n \xrightarrow{p} \vartheta$, δηλαδή $\forall\, \varepsilon > 0$, $\mathrm{P}\left(\left|T_n - \vartheta\right| > \varepsilon\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Π.χ. ο $\overline{\mathrm{X}}$ είναι συνεπής για τη μέση τιμή του πληθυσμού.

Θεώρημα

$\mathrm{X}_1,\cdots \mathrm{X}_n \sim f(\chi,\vartheta)$, T_n αμερόληπτη για τη ϑ και $\mathrm{var}(T_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Τότε η T_n είναι συνεπής.

Παράδειγμα1

Έστω $\mathrm{X} \sim Bin(n,p)$ και $T_n = \dfrac{\mathrm{X}}{n}$ τότε $\mathrm{E}(T_n) = \dfrac{\mathrm{E}(\mathrm{X})}{n} = \dfrac{np}{n} = p$ και $\mathrm{var}(T_n) = \dfrac{1}{n^2}\mathrm{var}(\mathrm{X}) = \dfrac{np(1-p)}{n^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Άρα η $T_n = \dfrac{\mathrm{X}}{n}$ είναι συνεπής για το p,

$$0 \le \mathrm{P}\left(\left|T_n - \vartheta\right| > \varepsilon\right) \le \frac{\mathrm{E}(T_n - \vartheta)^2}{\varepsilon^2} = \frac{\mathrm{var}(T_n)}{\varepsilon^2} \to 0$$

Ανισότητα Markov

Αν $\mathrm{X} \ge 0$ και $\alpha > 0 \Rightarrow \mathrm{P}(\mathrm{X} \ge \alpha) \le \dfrac{\mathrm{E}(\mathrm{X})}{\alpha}$.

$$\mathrm{P}\left(\left|\mathrm{X} - \mu\right| \ge \alpha\right) \le \frac{\mathrm{var}(\mathrm{X})}{\alpha^2}$$

Θεώρημα

Αν $\mathrm{X}_1,\cdots \mathrm{X}_n$ τυχαίες μεταβλητές με κανονική κατανομή $\Longleftrightarrow$ $\forall \lambda_1,\cdots \lambda_n \in R$ $\lambda_1\mathrm{X}_1 + \cdots \lambda_n\mathrm{X}_n$ ακολουθεί κανονική κατανομή.

<u>Πρόταση</u>

Έστω T_1, T_2 Α.Ο.Ε.Δ. της $g(\vartheta)$ με $\operatorname{var}(T_1) = \operatorname{var}(T_2) = \sigma^2 < \infty$. Τότε $T_1 = T_2$.

<u>Απόδειξη</u>

Θεωρώ εκτιμήτρια $T = \dfrac{T_1 + T_2}{2}$. Προφανώς $\mathrm{E}(T) = g(\vartheta) \Rightarrow T$ είναι αμερόληπτη και

$$\operatorname{var}(T) = \operatorname{var}\left(\frac{T_1 + T_2}{2}\right) = \frac{1}{4}\operatorname{var}(T_1 + T_2) = \frac{1}{4}\operatorname{var}(T_1) + \frac{1}{4}\operatorname{var}(T_2) + \frac{2}{4}\operatorname{cov}(T_1, T_2).$$

Από τη ανισότητα Caushy-Schwartz,

$$\operatorname{var}(T) \le \frac{1}{4}\operatorname{var}(T_1) + \frac{1}{4}\operatorname{var}(T_2) + \frac{1}{2}\sqrt{\operatorname{var}(T_1)}\sqrt{\operatorname{var}(T_2)}$$

Με την ισότητα να ισχύει αν και μόνον αν $T_1 = \alpha T_2 + \beta$

$$\operatorname{var}(T) \le \left(\frac{1}{2}\sqrt{\operatorname{var}(T_1)} + \frac{1}{2}\sqrt{\operatorname{var}(T_2)}\right)^2 = \sigma^2$$

1. $\operatorname{var}(T) < \sigma^2$ άτοπο $\Rightarrow T_1 = T_2$
2. $\operatorname{var}(T) = \sigma^2$ $\Rightarrow T_1 = \alpha T_2 + \beta \Rightarrow g(\vartheta) = \alpha\, g(\vartheta) + \beta \quad \forall \vartheta$
   $\Rightarrow \alpha = 1,\ \beta = 0$
   $\Rightarrow T_1 = T_2$.

$\mathrm{X}_1, \cdots \mathrm{X}_n$ τυχαίο δείγμα ~ $f(\chi, \vartheta)$. Η συνάρτηση πιθανοφάνειας (likelyhood function) είναι η $L(\vartheta) = \prod_{i=1}^{n} f(\chi_i, \vartheta)$, δηλαδή η από κοινού κατανομή των $\mathrm{X}_1, \cdots \mathrm{X}_n$ ως συνάρτηση της παραμέτρου.

<u>Παράδειγμα1</u>

1, 1, 0, 0, 0, 1

$p, p, (1-p), (1-p), (1-p), p$

$\mathrm{P}(\mathrm{X} = \chi) = p^{\chi}(1-p)^{1-\chi} \quad , \chi = 0{,}1$

$\mathrm{P}(\mathrm{X}_1 = 1, \mathrm{X}_2 = 1, \mathrm{X}_3 = 0, \mathrm{X}_4 = 0, \mathrm{X}_5 = 0, \mathrm{X}_6 = 1) = p \cdot p(1-p)\cdot(1-p)\cdot(1-p)\cdot p = p^3(1-p)^3$

μεγιστοποιώ ως προς p να πάρω το δείγμα, δηλαδή μεγιστοποιώ την πιθανότητα να πάρω το δείγμα.

Η εκτιμήτρια μεγίστης πιθανοφάνειας $\hat{\vartheta}$ (Ε.Μ.Π.) είναι η τιμή εκείνη $\hat{\vartheta} = \arg\sup L(\vartheta)$ που μεγιστοποιεί την $L(\vartheta)$, δηλαδή $L(\hat{\vartheta}) \ge L(\vartheta) \quad \forall \vartheta$.

Συνήθως αντί να μεγιστοποιώ την $L(\vartheta)$, μεγιστοποιώ τη **λογαριθμική πιθανοφάνεια** $l(\vartheta) = \log L(\vartheta) = \sum_{i=1}^{n} \log f(\chi_i, \vartheta)$.

Η παράγωγος της $l(\vartheta)$ ονομάζεται **score** $S(\vartheta) = \dfrac{\partial}{\partial \vartheta} l(\vartheta) = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial l}{\partial \vartheta} \log f(\chi_i, \vartheta)$.

<u>Παράδειγμα1</u>

$X_1,\cdots X_n$ τυχαίο δείγμα $\sim P_0(\vartheta)$

$$L(\vartheta)=\prod_{i=1}^{n}\frac{e^{-\vartheta}\,\vartheta^{\chi_i}}{\chi_i!}=\frac{e^{-n\vartheta}\,\vartheta^{\sum\chi_i}}{\prod_{i=1}^{n}\chi_i!}$$

$$l(\vartheta)=-n\vartheta+\sum\chi_i\log\vartheta-\log\prod_{i=1}^{n}\chi_i!$$

$$S(\vartheta)=\frac{\partial}{\partial\vartheta}\log L(\vartheta)=-n+\frac{\sum\chi_i}{\vartheta}$$

$$S(\vartheta)=0\Rightarrow\hat{\vartheta}=\frac{\sum\chi_i}{n}=\overline{X}$$

$$\frac{\partial^2\log L(\vartheta)}{\partial\vartheta^2}=-\frac{\sum\chi_i}{\vartheta^2}\bigg|_{\overline{X}}<0.$$

Άρα ο $\overline{X}$ είναι Ε.Μ.Π. του ϑ.

<u>Παράδειγμα2</u>

$X_1,\cdots X_n\sim Bernoulli(\rho)$

$$P(X_i=\chi_i)=\rho^{\chi_i}(1-\rho)^{1-\chi_i}$$

$$L(\rho)=\rho^{\sum\chi_i}(1-\rho)^{n-\sum\chi_i}$$

$$l(\rho)=\log L(\rho)=\sum\chi_i\log\rho+\left(n-\sum\chi_i\right)\log(1-\rho)$$

$$S(\rho)=\frac{\partial l(\rho)}{\partial\rho}\frac{\sum\chi_i}{\rho}+\frac{n-\sum\chi_i}{1-\rho}(-1)=0\Rightarrow\hat{\rho}=\overline{X}$$

και ισχύει $\left.\frac{\partial^2 l(\rho)}{\partial\rho^2}\right|_{\overline{X}}<0.$

<u>Παράδειγμα3</u>

$X_1,\cdots X_n\sim N(\mu,\sigma^2)$

Αναζητώ την Ε.Μ.Π. του (μ,σ^2).

$$L(\mu,\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-1}{2\sigma^2}(\chi_i-\mu)^2}=\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{\frac{-1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(\chi_i-\mu)^2}$$

$$l(\mu,\sigma^2)=-n\log\sigma-n\log\sqrt{2\pi}-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(\chi_i-\mu)^2$$

$$\frac{\partial l}{\partial\mu}=\frac{1}{2\sigma^2}\cdot2\cdot\sum_{i=1}^{n}(\chi_i-\mu)=0\Rightarrow\hat{\mu}=\overline{X}$$

$$\frac{\partial l}{\partial\sigma}=\frac{-n}{\sigma}+\frac{1}{2\sigma^3}\cdot2\cdot\sum_{i=1}^{n}(\chi_i-\mu)^2=0\Rightarrow\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2=0$$

για να δούμε ότι είναι μέγιστο βρίσκουμε Ιακωβιανές παραγώγους .