Mixed Distributions

$\rho N(\mu_1,\sigma_1^2)+(1-\rho)N(\mu_2,\sigma_2^2)$
$\int\ (\rho f_1+(1-\rho)f_2)=\rho\int f_1+(1-\rho)\int f_2\ =1$

$$L(\rho,\mu_1,\sigma_1^2,\mu_2,\sigma_2^2)=\prod_{i=1}^{n}\left[\rho f(\chi_i,\mu_1,\sigma_1^2)+(1-\rho)f(\chi_i,\mu_2,\sigma_2^2)\right]$$

Πολυωνυμική Κατανομή

Εκτελώ πείραμα $X_1,\cdots,X_k$ φορές $X_1+\cdots+X_k\ =n$.

Πιθανότητα επιτυχίας κατηγορίας k είναι ρ_k, τέτοιο ώστε $\sum_{i=1}^{n}\rho_i\ =1$.

$$L(\rho)=P(X_1=\chi_1,\cdots,X_k\ =\chi_k)=\frac{n!}{\chi_1!\cdots\chi_k!}\rho_1^{\chi_1}\cdots\rho_k^{\chi_k}$$

Ε.Μ.Π. των $\rho_1,\cdots,\rho_k$

$$l(\rho)=\log L(\rho)=\log n!-\log(\chi_1!\cdots\chi_k!)+\chi_1\log\rho_1+\cdots+\chi_k\log\rho_k$$

$$\frac{\partial l(\rho)}{\partial\rho_1}=\frac{\chi_1}{\rho_1}+\frac{\chi_k}{1-\sum_{i=1}^{k-1}\rho_i}\cdot(-1)=0$$

$$\frac{\partial l(\rho)}{\partial\rho_2}=\frac{\chi_2}{\rho_2}-\frac{\chi_k}{1-\sum_{i=1}^{k-1}\rho_i}=0$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial l(\rho)}{\partial\rho_{k-1}}=\frac{\chi_{k-1}}{\rho_{k-1}}-\frac{\chi_k}{1-\sum_{i=1}^{k-1}\rho_i}=0$$

λύνοντας το πιο πάνω σύστημα βρίσκουμε ότι $\hat{\rho}_i=\frac{X_i}{n}\quad ,i=1,\cdots k$.

Παράδειγμα2

$X_1,\cdots,X_n\sim U(0,\vartheta)$

$$L(\vartheta)=\prod_{i=1}^{n}f(\chi_i,\vartheta)=\frac{1}{\vartheta^n}\mathbb{1}_{[0\le\min X_i\le\max X_i\le\vartheta]}$$

γραφική

Άρα $\hat{\vartheta}=\max X_i$, $L(\vartheta)$ φθίνουσα στο $(\max X_i,+\infty)$.

Παράδειγμα3

$X_1,\cdots,X_n\sim f(\chi,\vartheta)=e^{-(\chi-\vartheta)}\ ,\qquad \chi\ge\vartheta$

$$L(\vartheta)=\prod_{i=1}^{n}f(\chi_i,\vartheta)=\prod_{i=1}^{n}e^{-(\chi_i-\vartheta)}\mathbb{1}_{[X_k\ge\vartheta]}=e^{-\sum(\chi_i-\vartheta)}\mathbb{1}_{[\min X_i\ge\vartheta]}=e^{-\sum\chi_i+n\vartheta}\mathbb{1}_{[\min X_i\ge\vartheta]}$$

$L(\vartheta)$ αύξουσα στο $(-\infty,\min X_i)\ \Rightarrow\hat{\vartheta}=\min X_i$.

Παράδειγμα4

$$X_1,\cdots,X_n \sim U\left(\vartheta-\frac{1}{2},\vartheta+\frac{1}{2}\right)$$

$$f(\chi,\vartheta)=1 \qquad ,\vartheta-\frac{1}{2}\le X\le\vartheta+\frac{1}{2}$$

$$L(\vartheta)=\prod_{i=1}^{n}1_{\left[\vartheta-\frac{1}{2}\le X_i\le\vartheta+\frac{1}{2}\right]}=1_{\left[\vartheta-\frac{1}{2}\le\min X_i\le\max X_i\le\vartheta+\frac{1}{2}\right]}$$

$$\vartheta-\frac{1}{2}\le\min X_i \quad\Rightarrow\quad \vartheta\le\min X_i+\frac{1}{2}$$

$$\max X_i\le\vartheta+\frac{1}{2} \quad\Rightarrow\quad \vartheta\ge\max X_i-\frac{1}{2}$$

άρα $\max X_i-\frac{1}{2}\le\vartheta\le\min X_i+\frac{1}{2}$

όπου $\hat{\vartheta}$ είναι οποιαδήποτε τιμή στο $\left[\max X_i-\frac{1}{2},\min X_i+\frac{1}{2}\right]$.

Παράδειγμα5

$$X_1,\cdots,X_n \sim f(\chi,\vartheta)=\frac{1}{2}e^{-|\chi-\vartheta|} \qquad ,\chi\in R.$$

$$L(\vartheta)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{2}e^{-|\chi_i-\vartheta|}=\frac{1}{2^n}e^{-\sum_{i=1}^{n}|\chi_i-\vartheta|}$$

$$\log L(\vartheta)=-n\log 2-\sum_{i=1}^{n}|\chi_i-\vartheta|.$$

Θεώρησε $X_1,\cdots,X_n$ και έστω X τυχαία μεταβλητή τέτοια ώστε $P(X=\chi_i)=\frac{1}{n}$. Αν $E(|X-\vartheta|)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}|\chi_i-\vartheta|$ ελαχιστοποιείται ως προς ϑ στη διάμεσο των $X_1,\cdots,X_n$.

- Αν το n είναι περιττός, η διάμεσος είναι η μεσαία παρατήρηση στο διατεταγμένο δείγμα.
- Αν το n είναι άρτιο, η διάμεσος είναι ο μέσος όρος των μεσαίων παρατηρήσεων στο διατεταγμένο δείγμα.

$X\sim F$

$E(X),\operatorname{var}(X)<+\infty$

Θεωρώ την $\Phi(\alpha)=E(X-\alpha)^2$. Ελαχιστοποίηση της $\Phi(\alpha) \Rightarrow \alpha^*=E(X)$

Τώρα έχω $\Phi(\alpha)=E(|X-\alpha|)$

Για συνεχή τυχαία μεταβλητή, η διάμεσος είναι εκείνο το σημείο για το οποίο $P(X\le m)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow F(m)=\frac{1}{2}$.

Θα ελαχιστοποιήσω την $\Phi(\alpha)=E(|X-\alpha|)$ ως προς α.

$$\Phi(\alpha)=E(|X-\alpha|)=\int(\chi-\alpha)dF(\chi)=\int_{-\infty}^{\alpha}|\chi-\alpha|\,dF(\chi)+\int_{\alpha}^{\infty}|\chi-\alpha|\,dF(\chi)$$

$$=\int_{-\infty}^{\alpha}(\alpha-\chi)\,dF(\chi)+\int_{\alpha}^{\infty}(\chi-\alpha)\,dF(\chi) \tag{1}$$

$$\int_{-\infty}^{\alpha}(\alpha-\chi)\,dF(\chi)=(\alpha-\chi)F(\chi)\Big|_{-\infty}^{\alpha}+\int_{-\infty}^{\alpha}F(\chi)d\chi$$

$$\int_{\alpha}^{\infty}(\chi-\alpha)\,dF(\chi)=-\int_{\alpha}^{\infty}(\chi-\alpha)\,d(1-F(\chi))=-(\chi-\alpha)(1-F(\chi))\Big|_{\alpha}^{\infty}+\int_{\alpha}^{\infty}(1-F(\chi))d\chi$$

(1) $\Rightarrow\ \Phi(\alpha)=\int_{-\infty}^{\alpha}F(\chi)d\chi+\int_{\alpha}^{\infty}(1-F(\chi))d\chi=F(\alpha)-(1-F(\alpha))=2F(\alpha)-1=0$

$\Rightarrow \alpha^*: F(\alpha^*)=\dfrac{1}{2}\Rightarrow \alpha^*$: διάμεσος.

<u>Ιδιότητες Ε.Μ.Π.</u>

1. $\mathrm{X}_1,\cdots,\mathrm{X}_n\sim f(\chi,\vartheta)$, T επαρκής στατιστική συνάρτηση και $\hat{\vartheta}$ Ε.Μ.Π. Τότε η $\hat{\vartheta}$ είναι συνάρτηση της T.

   Αφού T επαρκής $\Rightarrow$ $L(\vartheta)=g(T,\vartheta)\,h(\chi_1,\cdots\chi_n)$. Άρα μεγιστοποίηση ως προς $\hat{\vartheta}$ σημαίνει μεγιστοποίηση του $g(T,\vartheta)$ $\Rightarrow\hat{\vartheta}$ συνάρτηση του T.

2. $\mathrm{X}_1,\cdots,\mathrm{X}_n\sim f(\chi,\vartheta)$, $\hat{\vartheta}$ Ε.Μ.Π. και $T=g(\vartheta)$ όπου η g είναι 1-1 συνάρτηση. Τότε η $\hat{\tau}=g(\hat{\vartheta})$.

<u>Παράδειγμα1</u>

$\mathrm{X}_1,\cdots,\mathrm{X}_n\sim \mathrm{P}_0(\vartheta)$

$\mathrm{P}(\mathrm{X}=0)=e^{-\vartheta}=\tau$. Τότε η Ε.Μ.Π. της τ είναι η $\hat{\tau}=e^{-\hat{\vartheta}}=e^{-\overline{\mathrm{X}}}$.

<u>Παράδειγμα2</u>

$\mathrm{X}_1,\cdots,\mathrm{X}_n\sim \mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$. Να εκτιμηθούν τα μ,σ^2.

$\mathrm{P}(\mathrm{X}_1\le\chi)=\mathrm{P}\left(\dfrac{\mathrm{X}_1-\mu}{\sigma}\le\dfrac{\chi-\mu}{\sigma}\right)=\Phi\left(\dfrac{\chi-\mu}{\sigma}\right)$.

Αν θέσω $\tau=\Phi\left(\dfrac{\chi-\mu}{\sigma}\right)$ τότε $\hat{\tau}=\Phi\left(\dfrac{\chi-\hat{\mu}}{\hat{\sigma}}\right)$ όπου $\hat{\mu}=\overline{\mathrm{X}}$ και $\hat{\sigma}^2=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\mathrm{X}_i-\overline{\mathrm{X}}\right)^2$.

$\mathrm{X}_1,\cdots,\mathrm{X}_n \sim \mathrm{N}\left(\mu_{\mathrm{X}},\sigma^2\right)$
$\Psi_1,\cdots,\Psi_m \sim \mathrm{N}\left(\mu_{\Psi},\sigma^2\right)$
$\mathrm{X} \perp \Psi$
Να βρεθεί η Ε.Μ.Π. της

$\mathrm{P}\left(\overline{\Psi} \le \overline{\mathrm{X}}\right) = \mathrm{P}\left(\overline{\Psi} - \overline{\mathrm{X}} \le 0\right)$
γνωρίζω ότι $\overline{\mathrm{X}} \sim \mathrm{N}\left(\mu_{\mathrm{X}},\sigma^2\right)$ και $\overline{\Psi} \sim \mathrm{N}\left(\mu_{\Psi},\sigma^2\right)$
$\overline{\mathrm{X}} \perp \overline{\Psi}$ και $\overline{\Psi} - \overline{\mathrm{X}} \sim \mathrm{N}\left(\mu_{\mathrm{X}} + \mu_{\Psi}, \frac{\sigma^2}{n} + \frac{\sigma^2}{m}\right)$
άρα,

$$\mathrm{P}\left(\overline{\Psi} - \overline{\mathrm{X}} \le 0\right) = \mathrm{P}\left(\frac{\overline{\Psi} - \overline{\mathrm{X}} - \left(\mu_{\mathrm{X}} + \mu_{\Psi}\right)}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} \le \frac{\mu_{\mathrm{X}} - \mu_{\Psi}}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}}\right) = \Phi\left(\frac{\mu_{\mathrm{X}} - \mu_{\Psi}}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}}\right)$$

$$L\left(\mu_{\mathrm{X}},\mu_{\Psi},\sigma^2\right) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\chi_i - \mu_{\mathrm{X}}\right)^2} \prod_{j=1}^{m} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\psi_j - \mu_{\Psi}\right)^2}$$
$$= \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^{n+m} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left\{\sum_i \left(\mathrm{X}_i - \mu_{\mathrm{X}}\right)^2 + \sum_j \left(\Psi_l - \mu_{\Psi}\right)^2\right\}}$$

Η λογαριθμική επιφάνεια

$$l\left(\mu_{\mathrm{X}},\mu_{\Psi},\sigma^2\right) = -(n+m)\log\sigma - (n+m)\log\sqrt{2\pi} - \frac{1}{2\sigma^2}\left\{\sum_{i=1}^{n}\left(\chi_i - \mu_{\mathrm{X}}\right)^2 + \sum_{j=1}^{m}\left(\psi_j - \mu_{\Psi}\right)^2\right\}$$

$$\frac{\partial l}{\partial \mu_{\mathrm{X}}} = 0 \;\Rightarrow\; -\frac{1}{2\sigma^2}\cdot 2\sum_{i=1}^{n}\left(\chi_i - \mu_{\mathrm{X}}\right) = 0 \;\Rightarrow\; \mu_{\mathrm{X}} = \overline{\mathrm{X}} \qquad (1)$$
$$\frac{\partial l}{\partial \mu_{\Psi}} = 0 \;\Rightarrow\; -\frac{1}{2\sigma^2}\cdot 2\sum_{i=1}^{m}\left(\psi_j - \mu_{\Psi}\right) = 0 \;\Rightarrow\; \mu_{\Psi} = \overline{\Psi} \qquad (2)$$
$$\frac{\partial l}{\partial \mu_{\Psi}} = 0 \;\Rightarrow\; -\frac{(n+m)}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^2}\left\{\sum_{i=1}^{n}\left(\mathrm{X}_i - \overline{\mathrm{X}}\right)^2 + \sum_{j=1}^{m}\left(\Psi_j - \overline{\Psi}\right)\right\} = 0$$
$$\Rightarrow\; \hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\mathrm{X}_i - \overline{\mathrm{X}}\right)^2 + \sum_{j=1}^{m}\left(\Psi_j - \overline{\Psi}\right)^2}{n+m} \qquad (3)$$

Από τις (1),(2),(3) η Ε.Μ.Π της $\Phi\left(\frac{\mu_{\mathrm{X}} - \mu_{\Psi}}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}}\right)$ είναι η $\Phi\left(\frac{\overline{\mathrm{X}} - \overline{\Psi}}{\hat{\sigma}\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}}\right)$.

Παράδειγμα4

$$\mathrm{X}_1,\cdots,\mathrm{X}_n \sim f(\chi,\vartheta)=\frac{1}{\pi\left\{1+(\chi-\vartheta)^2\right\}} \quad ,\chi\in R, \vartheta\in R$$

Αναζητώ την Ε.Μ.Π. της ϑ.

$$L(\vartheta)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\pi\left\{1+(\chi_i-\vartheta)^2\right\}}=\frac{1}{\pi^n}\cdot\frac{1}{\prod_{i=1}^{n}\left\{1+(\chi_i-\vartheta)^2\right\}}$$

$$l(\vartheta)=-n\log\pi-\sum_{i=1}^{n}\log\left(1+(\chi_i-\vartheta)^2\right)$$

$$S(\vartheta)=\frac{\partial l(\vartheta)}{\partial\vartheta}=\sum_{i=1}^{n}\frac{2(\chi_i-\vartheta)}{1-(\chi_i-\vartheta)^2}=0 \qquad \text{Newton-Raphson}$$

Η λύση προσεγγίζεται με $f(\chi)=0 \quad \Rightarrow \chi_{n+1}=\chi_n-\dfrac{f(\chi_n)}{f'(\chi_n)}$

$$S(\vartheta)=0 \quad \Rightarrow \vartheta_{n+1}=\vartheta_n-\frac{S(\vartheta_n)}{S'(\vartheta_n)}$$

και $\hat{\vartheta}_n$ Ε.Μ.Π.

Ασυμπτωτικές Ιδιότητες Ε.Μ.Π.

1 . $X_1,\cdots,X_n$ τυχαίο δείγμα και $E(X_i)=\mu$

τότε $\overline{X}\xrightarrow{p}\mu$

2 . Αν g συνεχής τότε $g(\overline{X})\xrightarrow{p}g(\mu)$

3 . $X_1,\cdots,X_n$ τυχαίο δείγμα όπου $E(X_i)=\mu$ και $\operatorname{var}(X_i)=\sigma^2<+\infty$

τότε $\dfrac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{\sigma}\xrightarrow{\Delta}N(0,1)$.

Αν $Z_n=\dfrac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{\sigma}$ έχουμε $F_n(z)=P(Z_n\le z)\to P(Z\le z)=\Phi(z)$.

Θεώρημα

$X_1,\cdots,X_n \sim f(\chi,\vartheta)$

Υποθέτουμε ότι ισχύουν οι συνθήκες ομαλότητας :

1 . $\hat{\vartheta}\xrightarrow{p}\vartheta$

2 . $\sqrt{n}(\hat{\vartheta}-\vartheta)\xrightarrow{p}N\left(0,\dfrac{1}{I(\vartheta)}\right)$

Απόδειξη

Ανάπτυξη κατά Taylor

$$f(\chi)=f(\chi_0)+(\chi-\chi_0)f'(\chi_0)+\frac{(\chi-\chi_0)^2}{2}f''(\chi_0)+\cdots$$

$$S(\vartheta)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\log f(\chi_i,\vartheta)}{\partial\vartheta}$$

$$S(\hat{\vartheta})=S(\vartheta)+(\hat{\vartheta}-\vartheta)S'(\vartheta)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\log f(\chi_i,\vartheta)}{\partial\vartheta}+(\hat{\vartheta}-\vartheta)\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2\log f(\chi_i,\vartheta)}{\partial\vartheta^2}$$

$$\sqrt{n}(\hat{\vartheta}-\vartheta)\approx-\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\log f(\chi_i,\vartheta)}{\partial\vartheta}\right)\cdot\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2\log f(\chi_i,\vartheta)}{\partial\vartheta^2}\right)^{-1}$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2\log f(\chi_i,\vartheta)}{\partial\vartheta^2}\xrightarrow{p}-I(\vartheta)$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\log f(\chi_i,\vartheta)}{\partial\vartheta}\xrightarrow{D}N(0,I(\vartheta))$$

$$\sqrt{n}(\hat{\vartheta}-\vartheta)\xrightarrow{D}\frac{1}{I(\vartheta)}N(0,I(\vartheta))=N\left(0,\frac{1}{I(\vartheta)}\right).$$

Παράδειγμα1

$X_1, \cdots, X_n \sim N(0, \vartheta)$

1 .Να βρεθεί Ε.Μ.Π. της ϑ.

$$\hat{\vartheta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

$$E(\hat{\vartheta}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i^2) = \frac{1}{n} n\vartheta = \vartheta$$

$$\mathrm{var}(\hat{\vartheta}) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{var}(X_i^2) = \frac{2\vartheta}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

διότι $\frac{X_i}{\sqrt{\vartheta}} \sim N(0,1) \Rightarrow \frac{X_i^2}{\vartheta} \sim \mathcal{X}_1^2$ άρα $\mathrm{var}(X_i^2) = 2\vartheta$

$\hat{\vartheta} \xrightarrow{p} \vartheta$ και $\hat{\vartheta}$ συνεπής για το ϑ.

2 . $P(\hat{\vartheta} \le 3\vartheta)$=?

<u>Ακριβής υπολογισμός</u>

$$\frac{X_i}{\sqrt{\vartheta}} \sim N(0,1) \Rightarrow \frac{X_i^2}{\vartheta} \sim \mathcal{X}_1^2 \Rightarrow \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{\vartheta} \sim \mathcal{X}_n^2$$

$$P(\hat{\vartheta} \le 3\vartheta) = P\left(\frac{\sum_i X_i^2}{n} \le 3\vartheta\right) = P\left(\frac{\sum_i X_i^2}{\vartheta} \le 3n\right) = P(X_n^2 \le 3n)$$

<u>Με Ασυμπτωτικές ιδιότητες</u>

$$\sqrt{n}(\hat{\vartheta} - \vartheta) \xrightarrow{D} N\left(0, \frac{1}{I(\vartheta)}\right) = N(0, 2\vartheta^2)$$

$$f(\chi, \vartheta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\vartheta}} e^{-\frac{1}{2\vartheta}\chi^2}$$

$$I(\vartheta) = E\left(\frac{\partial^2 \log f(\chi,\vartheta)}{\partial \vartheta^2}\right) = \cdots = -E\left(\frac{1}{2\vartheta^2} - \frac{\chi^2}{\vartheta^3}\right) = -\frac{1}{2\vartheta^2} + E\left(\frac{\chi^2\vartheta}{\vartheta^3}\right) = \frac{1}{2\vartheta^2}$$

$$P(\hat{\vartheta} \le 3\vartheta) = P\left(\frac{\sqrt{n}(\hat{\vartheta} - \vartheta)}{\sqrt{2}\vartheta} \le \frac{\sqrt{n}(3\vartheta - \vartheta)}{\sqrt{2}\vartheta}\right) = P(Z \le \sqrt{2n}) = \Phi(\sqrt{2n}).$$

Εκτίμηση Κατά Bayes

Θεώρημα Bayes

$A_1,\cdots A_k$ διαμέριση του S. Έχουμε ότι $P(A_i)>0$ και B ενδεχόμενο , $P(B)>0$, $P(B / A_i)>0$. Τότε,

$$P(A_i / B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B / A_i)P(A_i)}{\sum_{i=1}^{k} P(B / A_i)P(A_i)}$$

$X_1,\cdots,X_n \sim f(\chi,\vartheta)$

Υποθέτω ότι η ϑ είναι τυχαία μεταβλητή.

$\vartheta \sim \pi(\vartheta)$ εκ των προτέρων κατανομή (prior).

$X_1,\cdots,X_n / \vartheta \sim f(\chi,\vartheta)$

πώς εκτιμώ τη ϑ?

Όλη η πληροφορία για τη ϑ βρίσκεται στην εκ των υστέρων κατανομή $\pi\left(\vartheta / \underset{\sim}{\chi}\right)$.

Για να εκτιμήσω τη ϑ, αναζητώ $T\left(\underset{\sim}{\chi}\right)$ έτσι ώστε να ελαχιστοποιήσω την $E\left(T\left(\underset{\sim}{X}-\vartheta\right)^2 / \overline{X}\right)$.

$\hat{\vartheta}$ εκτιμήτρια Bayes και $\hat{\vartheta} = E\left(\vartheta / \underset{\sim}{X}\right) = \int \vartheta \pi\left(\vartheta / \underset{\sim}{X}\right) d\vartheta$

$$\pi\left(\vartheta / \underset{\sim}{\chi}\right) = \frac{f\left(\underset{\sim}{\chi} / \vartheta\right)\pi(\vartheta)}{f\left(\underset{\sim}{\chi}\right)} \propto \prod_{i=1}^{n} f(\chi_i,\vartheta)\pi(\vartheta) \propto L\left(\underset{\sim}{\chi} / \vartheta\right)\cdot \pi(\vartheta)$$

Παράδειγμα1

$$X_1,\cdots,X_n \;/\; \vartheta \sim Bernoulli(\vartheta)$$

$$\vartheta \sim Beta(\alpha,\beta)$$

$$\pi(\vartheta)=c\vartheta^{\alpha-1}(1-\vartheta)^{\beta-1}$$

$$\prod_{i=1}^{n}\vartheta^{\chi_i}(1-\vartheta)^{1-\chi_i} = \vartheta^{\sum\chi_i}(1-\vartheta)^{n-\sum\chi_i}$$

$$\pi\left(\vartheta / \underset{\sim}{\chi}\right) \propto \vartheta^{\sum\chi_i}(1-\vartheta)^{n-\sum\chi_i}\,\vartheta^{\alpha-1}(1-\vartheta)^{\beta-1} = \vartheta^{\sum\chi_i+\alpha-1}(1-\vartheta)^{n-\sum\chi_i+\beta-1}$$

άρα η $\pi\left(\vartheta / \underset{\sim}{\chi}\right) \sim Be\left(\sum\chi_i+\alpha, n-\sum\chi_i+\beta\right)$

επειδή $E(Be(\alpha,\beta))=\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}$

$\hat{\vartheta}=\dfrac{\sum\chi_i+\alpha}{\sum\chi_i+\alpha+n-\sum\chi_i+\beta}=\dfrac{\sum\chi_i+\alpha}{n+\alpha+\beta}=\dfrac{\overline{X}+\alpha/n}{1+\alpha/n+\beta/n}\xrightarrow{n\to\infty}\overline{X}$ Ε.Μ.Π. για το ϑ της Bernoulli.

Παράδειγμα2

$$X_1,\cdots,X_n \sim P_0(\vartheta)$$

$$\vartheta \sim G(\alpha,\beta)$$

$$L\left(\underset{\sim}{\chi} / \vartheta\right)=\prod_{i=1}^{n}\frac{e^{-\vartheta}\vartheta^{\chi_i}}{\chi_i!}=\frac{e^{-n\vartheta}\vartheta^{\sum\chi_i}}{\prod_{i=1}^{n}\chi_i!}$$

$$\pi(\vartheta)=c\vartheta^{\alpha-1}e^{-\vartheta/\beta}$$

$$\pi\left(\vartheta / \underset{\sim}{\chi}\right) \propto e^{-n\vartheta}\vartheta^{\sum\chi_i}\vartheta^{\alpha-1}e^{-\vartheta/\beta} = e^{-\vartheta\left(n+1/\beta\right)}\vartheta^{\sum\chi_i+\alpha-1}$$

$$\pi\left(\vartheta / \underset{\sim}{\chi}\right) \sim G\left(\sum\chi_i+\alpha, \frac{1}{n+1/\beta}\right)$$

$\hat{\vartheta}==\dfrac{\sum\chi_i+\alpha}{n+1/\beta}\xrightarrow{n\to\infty}\overline{X}$ Ε.Μ.Π. για το ϑ της Poisson.

<u>Εκτιμητές Ελαχίστων Τετραγώνων (Least Squares)</u>

$X_1, \cdots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$ σ^2 γνωστό

γραφική

$X_i = \mu + \varepsilon_i \qquad \varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$

$$L(\mu) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum(\chi_i - \mu)^2}$$

$$\Rightarrow \log L(\mu) = l(\mu) = -n \log \sigma\sqrt{2\pi} - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(\chi_i - \mu)^2$$

$$\therefore l(\mu) = c + \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(\chi_i - \mu)^2$$

για να μεγιστοποιήσω την $L(\mu)$ ως προς μ αρκεί να ελαχιστοποιήσω την παράσταση $\sum_{i=1}^{n}(\chi_i - \mu)^2$.

Γενικά, οι εκτιμήτριες ελαχίστων τετραγώνων για ένα δείγμα $X_1, \cdots, X_n \sim f(\chi, \vartheta)$ δίνονται από την ελαχιστοποίηση του $\sum_{i=1}^{n}(\chi_i - g(\vartheta))^2$.

Για την κανονική κατανομή της μ =Ε.Ε.Τ.

$(X_1, \Psi_{1,}), \cdots, (X_n, \Psi_n)$

γραφική

Μέθοδος των Ροπών

$X_1, \cdots X_n \sim f(\chi, \vartheta)$

k ροπή : $\mu_k(\vartheta) = \int \chi^k f(\chi, \vartheta) d\chi$

δειγματική ροπή $m_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \chi_i^k$

εκτιμώ την ϑ, εξισώνοντας : $\mu_k(\vartheta) = m_k$

για $k = 1$, $\overline{X} = \mu(\vartheta)$.

Παράδειγμα1

$X_1, \cdots X_n \sim G(\alpha, \beta)$

$\vartheta = (\alpha, \beta)$

$\mu_1(\vartheta) = \alpha \cdot \beta = m_1$ και $\mu_2(\vartheta) = \alpha(\alpha + 1)\beta^2 = m_2$

τότε $\hat{\alpha} = \dfrac{m_1}{\dfrac{m_2}{m_1} - 1}$ $\qquad \hat{\beta} = \dfrac{m_2}{m_1} - 1$.

Εκθετική Οικογένεια Κατανομών

$\mathrm{X} \sim f(\chi,\vartheta)=e^{\vartheta\chi-b(\vartheta)+c(\chi)}$, $\chi\in \mathrm{A}$ κανονική μορφή

X ανηκεί στην εκθετική οικογένεια κατανομών.

Παράδειγμα1

$\mathrm{X}\sim \mathrm{P}_0(\vartheta)$

$$f(\chi,\vartheta)=\frac{e^{-\vartheta}\,\vartheta^{\chi}}{\chi!}=e^{\chi\log\vartheta-\vartheta-\log\chi!}$$

$c(\chi)=-\log\chi!$ $\quad b(\vartheta)=\vartheta$ με κανονική μορφή όταν $u=\log\vartheta$.

Παράδειγμα2

$\mathrm{X}\sim Bin(n,p)$

$$f(\chi,\vartheta)=\binom{n}{\chi}p^{\chi}(1-p)^{n-\chi}=e^{-\log p+(n-\chi)\log(1-p)+\log\binom{n}{\chi}}$$

$$=e^{\chi\log\left(\frac{p}{1-p}\right)+n\log(1-p)+\log\binom{n}{\chi}}$$

όπου $c(\chi)=\log\binom{n}{\chi}$ $\quad b(p)=-n\log(1-p)$ και $\vartheta=\log\frac{p}{1-p}$.

Παράδειγμα3

$\mathrm{X}\sim \mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\chi-\mu)^2}=e^{-\log\sigma-\log\sqrt{2\pi}-\frac{1}{2\sigma^2}\chi^2+\frac{\chi\mu}{\sigma^2}-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}}$$

$$=e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}-\log\sigma-\log\sqrt{2\pi}+\left(\chi^2\quad\chi\right)\begin{pmatrix}-\frac{1}{2\sigma^2}\\ \frac{\mu}{\sigma}\end{pmatrix}}$$

$c(\chi)=\log\sqrt{2\pi}$ $\quad b(\mu,\sigma^2)=-\frac{\mu}{2\sigma^2}-\log\sigma$.

$$\mathrm{X}_1,\cdots\mathrm{X}_n\sim f(\chi,\vartheta)=e^{\vartheta T(\chi)-b(\vartheta)+c(\chi)}\qquad,\chi\in\mathrm{A}$$

$$L(\vartheta)=e^{\vartheta\sum_{i=1}^{n}T(\chi_i)-nb(\vartheta)+\sum_{i=1}^{n}\chi_i}\qquad,\chi\in\mathrm{A}$$

για την παραπάνω εκθετική οικογένεια κατανομών ισχύει ότι $\sum T(\mathrm{X}_i)$ είναι επαρκής και πλήρης.

$\mathrm{X} \sim f_{\mathrm{X}}(\chi)$
$\mathrm{M}_{\mathrm{X}}(t) = \int e^{t\chi} f_{\mathrm{X}}(\chi) d\chi \qquad t \in (-\delta, \delta)$
$\mathrm{M}_{\mathrm{X}}(0) = 1$
$\mathrm{M}'_{\mathrm{X}}(t) \,|_{t=0} = \mathrm{E}(\mathrm{X})$
$\mathrm{M}^{(k)}_{\mathrm{X}}(t) \,|_{t=0} = \mathrm{E}(\mathrm{X}^k)$

ορίζω $f_{\Psi}(\psi) \propto f_{\mathrm{X}}(\psi) e^{t\psi} \Rightarrow f_{\Psi}(\psi) = c f_{\mathrm{X}}(\psi) e^{t\psi}$

$$1 = \int f_{\Psi}(\psi) = c \int f_{\mathrm{X}}(\psi) e^{t\psi} = c\mathrm{M}_{\mathrm{X}(t)} \quad \Rightarrow c = \frac{1}{\mathrm{M}_{\mathrm{X}}(t)}$$

$$\Rightarrow f_{\Psi}(\psi) = \frac{1}{\mathrm{M}_{\mathrm{X}}(t)} f_{\mathrm{X}}(\psi) e^{t\psi} = e^{t\psi - \log \mathrm{M}_{\mathrm{X}}(t) + \log f_{\mathrm{X}}(\psi)}$$

όπου $b(t) = \log \mathrm{M}_{\mathrm{X}}(t)$ cumulant generating function
$b(0) = 0$

$$b'(0) = \frac{\mathrm{M}'_{\mathrm{X}}(t)}{\mathrm{M}_{\mathrm{X}}(t)} \,|_{t=0} = \mathrm{E}(\mathrm{X})$$

$$b''(0) = \frac{\mathrm{M}''_{\mathrm{X}}(t)\mathrm{M}_{\mathrm{X}}(t) - (\mathrm{M}'_{\mathrm{X}}(t))^2}{\mathrm{M}_{\mathrm{X}}(t)} \,|_{t=0} = \mathrm{E}(\mathrm{X}^2) - \mathrm{E}^2(\mathrm{X}) = Var(\mathrm{X})$$

Γενικά,

$$f(\chi, \vartheta) = e^{\vartheta T(\chi) - b(\vartheta) + c(\chi)} \qquad , \chi \in \mathrm{A}$$

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta} b(\vartheta) = \mathrm{E}_{\vartheta}(T(\chi))$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} b(\vartheta) = Var_{\vartheta}(T(\chi))$$

$$\log f(\chi, \vartheta) = T(\chi)\vartheta - b(\vartheta) + c(\chi)$$

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta} \log f(\chi, \vartheta) = T(\chi) - b'(\vartheta)$$

$$\mathrm{E}\left(\frac{\partial}{\partial \vartheta} \log f(\chi, \vartheta)\right) = 0 \quad \Rightarrow \mathrm{E}(T(\chi)) = b'(\vartheta)$$

$$-\mathrm{E}\left(\frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} \log f(\chi, \vartheta)\right) = \mathrm{E}\left(\frac{\partial}{\partial \vartheta} \log f(\chi, \vartheta)\right)^2 = \mathrm{E}(T(\chi) - b'(\vartheta))^2 = Var(T(\chi)).$$