ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΑ ΕΜΠΙΣΤΟΣΥΝΗΣ

$X_1,\dots,X_n \sim f(x,\theta)$
$1-\alpha =$ επίπεδο σημαντικότητας ή βαθμός εμπιστοσύνης
Να προσδιοριστούν στατιστικές συναρτήσεις $L(\underset{\sim}{x})$ και $U(\underset{\sim}{x})$
τ.ω. $P\left(L(\underset{\sim}{x}) \le \theta \le U(\underset{\sim}{x})\right) = 1-a$

π.χ.
Με πιθανότητα 95%,
το κόμμα Α θα πάρει μεταξύ 35 και 45% των ψήφων
1-α = 95% $\Rightarrow$ α = 5% βαθμός εμπιστοσύνης

Παράδειγμα

$X_1,\dots,X_n \sim N(\mu;\sigma^2)$
σ^2 γνωστό

$$\mathrm{Z} = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

$$P(z_1 \le Z \le z_2) = 1-a$$

$$\Rightarrow P\left(z_1 \le \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \le z_2\right) = 1-a$$

$$\Rightarrow P\left(\frac{z_1\sigma}{\sqrt{n}} \le \bar{X}-\mu \le \frac{z_2\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1-a$$

$$\Rightarrow P\left(\underbrace{\bar{X}-\frac{z_2\sigma}{\sqrt{n}}}_{L(\underset{\sim}{X})} \le \mu \le \underbrace{\bar{X}-\frac{z_1\sigma}{\sqrt{n}}}_{U(\underset{\sim}{X})}\right) = 1-a$$

$$\int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} f_T(t,\theta)dt = \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} \frac{nt^{n-1}}{\theta^n}dt = 1-(p_1+p_2)$$

Δ.Ε. $\left(\bar{X}-z_{a/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X}+z_{a/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

Εφαρμογή
n = 4
$X_1,\dots,X_4 \sim \mathrm{N}(\mu,9)$
$\bar{X}$ = 2.7
a = 5%
95% Δ.Ε. για το μ

$2.7 \pm z_{0.0025}\frac{3}{\sqrt{4}}$ $\Rightarrow$ Δ.Ε. (-0.24,5.64)

Το διάστημα εμπιστοσύνης δεν ορίζεται μονοσήμαντα
Αν πάρω πάλι 95% Δ.Ε., αλλά $z_1 = z_{0.0465} = -1.68 \quad z_2 = z_{0.0035} = 2.7$
Το καινούριο Δ.Ε. είναι (-1.35, 5.22)

Αναζητώ Δ.Ε. ελαχίστου μήκους

Μέθοδοι Εύρεσης Διαστημάτων Εμπιστοσύνης

I) Μέθοδος της Αντιστρεπτής Ποσότητας
II) Γενική Μέθοθος
III) Ασυμπτωτικά Διαστήματα Εμπιστοσύνης

Κατανομές

χ^2 Κατανομή

$$X_1,\ldots,X_n \sim N(0,1)$$

$$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sim \chi^2_n \equiv G\left(\frac{n}{2},2\right)$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} y^{n/2-1} e^{-y/2} \qquad , y \geq 0$$

$$E(Y) = \alpha\beta = \frac{n}{2}2 = n$$

$$Var(Y) = \alpha\beta^2 = \frac{n}{2}2^2 = 2n$$

Αν $n = 2$,

$$f_Y(y) = \frac{1}{2}e^{-y/2} = \mathrm{E}\left(\frac{1}{2}\right) = \chi^2_2$$

$$M_Y(t) = \frac{1}{(1-2t)^{n/2}} \qquad , \ t < 1/2$$

Θεώρημα

$Y_1,\ldots,Y_k \sim \chi^2_{n_i}$, $i = 1,\ldots,k$, ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές

$$T = \sum_{i=1}^{n} Y_i \sim \chi^2_{\sum_{i=1}^{k} n_i}$$

<u>απόδειξη</u>:

$$M_Y(t)=E\left(e^{tT}\right)=E\left(e^{t\sum_{i=1}^{k}Y_i}\right)=E\left(\prod_{i=1}^{k}e^{tY_i}\right)=\prod_{i=1}^{k}E\left(e^{tY_i}\right)=\prod_{i=1}^{k}\frac{1}{(1-2t)^{n/2}}=\frac{1}{(1-2t)^{\sum_{i=1}^{k}n_i/2}}$$

Έστω $X\sim N(0,1)\ \Rightarrow\ Y=X^2\sim\chi^2_1$

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P\left(X^2\le y\right)=P\left(-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y}\right)=\Phi\left(\sqrt{y}\right)-\Phi\left(-\sqrt{y}\right)\quad ,\ y>0$$

$$f_Y(y)=\frac{dF_Y(y)}{dy}=\frac{1}{2\sqrt{y}}\left[\phi\left(\sqrt{y}\right)-\phi\left(-\sqrt{y}\right)\right]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}y^{-1/2}e^{-y/2}=\frac{1}{2^{1/2}\pi^{1/2}}y^{1/2-1}e^{-y/2}$$

$$\left(\Gamma\left(1/2\right)=\pi^{1/2}\right)$$

<u>Θεώρημα</u>

Έστω $X_1,\dots,X_n\sim N\left(\mu\,;\sigma^2\right)$

$$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$$

$$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$$

Τότε

1) $\bar{X}\sim N\left(\mu,\sigma^2/n\right)$

2) $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2_{n-1}$

3) $\bar{X}\perp S^2$

<u>Παράδειγμα</u>

$X_1,\dots,X_6$ $\tau.\delta.\sim N(0,1)$

$$Y=\left(X_1+X_2+X_3\right)^2+\left(X_4+X_5+X_6\right)^2$$

$$X_1+X_2+X_3\sim N(0,3)$$

$$\Rightarrow\frac{X_1+X_2+X_3}{\sqrt{3}}\sim N(0,1)$$

$$\Rightarrow\frac{\left(X_1+X_2+X_3\right)^2}{3}\sim\chi^2_1\qquad(1)$$

ομοίως,

$$\frac{\left(X_4+X_5+X_6\right)^2}{3}\sim\chi^2_1\qquad(2)$$

από (1) και (2)

$$\Rightarrow Y^*=\frac{Y}{3}\sim\chi^2_2$$

t Κατανομή

$$\left.\begin{array}{l} Y \sim N(0,1) \\ Z \sim \mathcal{X}_n^2 \\ Y \perp Z \end{array}\right\} \Rightarrow t = \frac{Y}{\sqrt{Z/n}} \sim t_n$$

$$f_n(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\sqrt{n}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$ n :βαθμοί ελευθερίας

<u>Ιδιότητες της t κατανομής</u>

1) Είναι συμμετρική

2) Είναι «σαν» κανονική,
αλλά έχει πιο πολλή πιθανότητα στις άκρες

3) $\lim_{n\to\infty} f_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} \quad , \quad t \in \mathbb{R}$
Για μεγάλα n , συγκλίνει στην κανονική

4) $X \sim t_n$
$E\left(|X|^k\right) < \infty \quad , \quad k < \pi$
$E\left(|X|^k\right) = \infty \quad , \quad k \geq \pi$
$n > 2 \ , \ E(X) = 0$ (ολοκλήρωμα περιττής συνάρτησης γύρω από συμμετρικό άξονα)
$Var(X) = \frac{n}{n-2}$

5) $X_1, \ldots, X_n \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$
$\bar{X} \sim N\left(\mu, \sigma^2/n\right)$
$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \mathcal{X}_{n\text{-}1}^2$
$\bar{X} \perp S^2$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{\sqrt{n}\left(\bar{X}-\mu\right)}{\sigma} \sim N(0,1) \\ \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \mathcal{X}_{n\text{-}1}^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\frac{\sqrt{n}\left(\bar{X}-\mu\right)}{\sigma}}{\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \Big/ (n-1)}} \sim t_{n-1}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{n}\left(\bar{X}-\mu\right)}{S} \sim t_{n-1}$$

F Κατανομή

$$\left.\begin{array}{l} Y \sim \chi_m^2 \\ Z \sim \chi_n^2 \\ Y \perp Z \end{array}\right\} \Rightarrow F = \frac{\frac{Y}{m}}{\frac{Z}{n}} \sim F_{m;n}$$

$$f_{m;n}(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}(m+n)\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} m^{m/2} n^{n/2} \frac{x^{m/2} - 1}{(mx+n)^{\frac{m+n}{2}}} \qquad , \quad x > 0$$

<u>Παρατηρήσεις</u>:

1) $F_{m;n} \neq F_{n;m}$

2) $X \sim F_{m;n} \Rightarrow \frac{1}{X} \sim F_{n;m}$

3) $t_n^2 \equiv F_{1;n}$

$$t_n^2 = \left(\frac{N(0,1)}{\sqrt{\chi_n^2 / n}} \right)^2 = \frac{\chi_1^2 / 1}{\chi_n^2 / n}$$

I) Εύρεση Διαστημάτων Εμπιστοσύνης με τη Μέθοδο της Αντιστρεπτής Ποσότητας

Αντιστρεπτή Ποσότητα

$X_1,\ldots,X_n$ τ.δ. $\sim f(x;\theta)$
Q=Q$(\underset{\sim}{x};\theta)$
Η κατανομή της είναι ανεξάρτητη του θ .
Τότε η Q ονομάζεται αντιστρεπτή ποσότητα.

$X_1,\ldots,X_n$ $\tau.\delta. \sim N(\mu;\sigma^2)$

Αντιστρεπτές Ποσότητες

(α) Για την παράμετρο μ
$$\begin{cases} \sigma^2 \text{ γνωστο } \rightarrow \dfrac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\sigma} \sim N(0,1) \\ \sigma^2 \text{ αγνωστο} \rightarrow \dfrac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{S} \sim t_{n-1} \end{cases}$$
(συναρτήσεις των δεδομένων με κατανομές ανεξάρτητες των μ)

(β) Για την παράμετρο σ^2
$$\begin{cases} \mu \text{ γνωστο } \rightarrow \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_n \\ \mu \text{ αγνωστο} \rightarrow \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1} \end{cases}$$
(συναρτήσεις των δεδομένων με κατανομές ανεξάρτητες των σ^2)

Παράδειγμα 1
$X_1,\ldots,X_n$ $\tau.\delta. \sim N(\mu;\sigma^2)$
σ^2 γνωστό
Να υπολογιστεί Δ.Ε. $(1-a)\%$, ελαχίστου μήκους, για την παράμετρο μ

$$Q\ (\underset{\sim}{x};\mu)=\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

Αναζητώ q_1 και q_2 τ.ω. $P(q_1 \le Q \le q_2)=1-a$

$$\Rightarrow P\left(q_1 \le \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \le q_2\right)=1-a$$

$$\Rightarrow P\left(\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}q_2 \le \mu \le \bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}q_1\right)=1-a$$

Μήκος Δ.Ε. = $L=\left(\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}q_1\right)-\left(\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}q_2\right)=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}(q_2-q_1)$

Ελαχιστοποιώ την συνάρτηση L

με τον περιορισμό $P(q_1 \le Q \le q_2)=1-a$

Θεωρώ το q_2 συνάρτηση του q_1 χωρίς βλάβη της γενικότητας, δηλαδή $q_2=q_2(q_1)$

Παραγωγίζω την L ως προς q_1

$$\frac{\partial L}{\partial q_1}=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\left(\frac{dq_2}{dq_1}-1\right) \qquad (1)$$

και από την $P(q_1 \le Q \le q_2)=1-a$

$$\Rightarrow \Phi(q_2)-\Phi(q_1)=1-a$$

Παραγωγίζω ως προς q_1

$$\phi(q_2)\frac{dq_2}{dq_1}-\phi(q_1)=0$$

$$\Rightarrow \frac{dq_2}{dq_1}=\frac{\phi(q_1)}{\phi(q_2)} \qquad (2)$$

Από τις (1) και (2) ,

$$\frac{\partial L}{\partial q_1}=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\left(\frac{\phi(q_1)}{\phi(q_2)}-1\right)=0$$

$$\Rightarrow \phi(q_1)=\phi(q_2)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}q_1^2}=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}q_2^2}$$

$\Rightarrow q_1=q_2$ ή $q_1=-q_2$

αφού έχουμε διάστημα για να ορίζεται πρέπει $q_1=-q_2$ για Δ.Ε. ελαχίστου μήκους

Άρα $\left(\bar{X}-z_{a/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{X}+z_{a/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ Δ.Ε. $(1-a)\%$ ελαχίστου μήκους για το μ

<u>Εφαρμογή 1</u>

90% Δ.Ε.

$(1-a)\%$ =90% $\Rightarrow$ a = 0.1

$\Rightarrow z_{a/2}=z_{0.1/2}=z_{0.05}=$1.645

Δ.Ε. $\bar{X}\pm 1.645\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

<u>Εφαρμογή 2</u>

95% Δ.Ε.

$(1-a)\%$ =95% $\Rightarrow$ a = 0.05

$\Rightarrow z_{a/2}=z_{0.05/2}=z_{0.025}=$1.96

Δ.Ε. $\bar{X}\pm 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ Πιο μεγάλο Δ.Ε. γιατί είμαστε πιο ακριβείς

<u>Παράδειγμα 2</u>

$X_1,\dots,X_n \tau.\delta. \sim f(x;\theta)=e^{-(x-\theta)}$, $x\geq\theta$

$\min\limits_{i=1,\dots,n} X_i = Y_1 < Y_2 < Y_3 < \dots < Y_n = \max\limits_{i=1,\dots,n} X_i$

1) Να δειχθεί ότι η $Q=2n(Y_1-\theta)$ είναι αντιστρεπτή ποσότητα

Αρκεί να βρω την κατανομή της Q

Η κατανομή της Y_1 είναι $f_{Y_1}(y_1)=ne^{-n(y_1-\theta)}$, $y_1\geq\theta$

$Q=2n(Y_1-\theta)\Rightarrow Y_1=\dfrac{Q}{2n}+\theta$

$\dfrac{dy_1}{dq}=\dfrac{1}{2n}$

$f_Q(q)=ne^{-n\left(\frac{q}{2n}+\theta-\theta\right)}\dfrac{1}{2n}=\dfrac{1}{2}e^{-q/2}$, $q>0$

$\Rightarrow f_Q(q)=\mathrm{E}\left(\dfrac{1}{2}\right)$ ανεξάρτητη του θ

Άρα η Q είναι αντιστρεπτή ποσότητα

2) Από την Q θα υπολογίσω Δ.Ε. ελαχίστου μήκους για το θ

Αναζητώ q_1 και q_2 τ.ω. $P(q_1\leq Q\leq q_2)=1-a$

$P(q_1\leq 2n(Y_1-\theta)\leq q_2)=1-a$

$\Rightarrow P\left(y_1-\dfrac{q_2}{2n}\leq\theta\leq y_1-\dfrac{q_1}{2n}\right)=1-a$

Μήκος Δ.Ε. = $L=\left(y_1-\dfrac{q_1}{2n}\right)-\left(y_1-\dfrac{q_2}{2n}\right)=\dfrac{1}{2n}(q_2-q_1)$

Ελαχιστοποιώ την συνάρτηση L

με τον περιορισμό $P(q_1\leq Q\leq q_2)=1-a$

Θεωρώ το q_2 συνάρτηση του q_1 χωρίς βλάβη της γενικότητας, δηλαδή $q_2=q_2(q_1)$

Παραγωγίζω την L ως προς q_1

$\dfrac{\partial L}{\partial q_1}=\dfrac{1}{2n}\left(\dfrac{dq_2}{dq_1}-1\right)$ (1)

και από την $P(q_1\leq Q\leq q_2)=1-a$

$\Rightarrow\displaystyle\int_{q_1}^{q_2}\frac{1}{2}e^{-q/2}dq=1-a\Rightarrow\left(-e^{-q/2}\right)\Big|_{q_1}^{q_2}=1-a\Rightarrow e^{-q_1/2}-e^{-q_2/2}=1-a$

Παραγωγίζω ως προς q_1

$\Rightarrow\dfrac{d}{dq_1}\left(e^{-q_1/2}-e^{-q_2/2}\right)=0\Rightarrow-\dfrac{1}{2}e^{-q_1/2}+\dfrac{1}{2}e^{-q_2/2}\dfrac{dq_2}{dq_1}=0\Rightarrow\dfrac{dq_2}{dq_1}=e^{-1/2(q_1-q_2)}$ (2)

Από τις (1) και (2) ,

$\dfrac{\partial L}{\partial q_1}=\dfrac{1}{2n}\left(e^{-1/2(q_1-q_2)}-1\right)>0$ διότι $q_1<q_2\Rightarrow(q_1-q_2)<0\Rightarrow-\dfrac{1}{2}(q_1-q_2)>0$

$\Rightarrow e^{-1/2(q_1-q_2)}>0$ αύξουσα

Άρα ελαχιστοποιείται όταν $q_1=0$

Άρα $\int_0^{q_2} \frac{1}{2} e^{-q/2} dq = 1-a \Rightarrow \left(-e^{-q/2}\right)\Big|_0^{q_2} = 1-a \Rightarrow e^{-q_2/2} = a \Rightarrow q_2 = -2\log a$

Δ.Ε. $(1-a)$ % ,ελαχίστου μήκους, για το θ είναι το

$\left(y_1 + \frac{\log a}{n}, y_1\right)$, $0 < a < 1$

Παράδειγμα 3

$$\left.\begin{aligned} X_1,\dots,X_n &\sim N\left(\mu_X,\sigma_X^2\right) \\ Y_1,\dots,Y_m &\sim N\left(\mu_Y,\sigma_Y^2\right) \end{aligned}\right\} \text{Τυχαία δείγματα}$$

$X \perp Y$

Πρέπει να θεωρήσω $\mu_X - \mu_Y$ για εκτίμηση διαφοράς μέσων όρων

Αναζητώ $(1-a)\%$ Δ.Ε. για την παράμετρο $\mu_X - \mu_Y$

1) σ_X^2 , σ_Y^2 γνωστά

$$\left.\begin{aligned} &\bar{X} \sim N\left(\mu_X, \frac{\sigma_X^2}{n}\right) \\ &\bar{Y} \sim N\left(\mu_Y, \frac{\sigma_Y^2}{m}\right) \\ &\bar{X} \perp \bar{Y} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \bar{X} - \bar{Y} \sim N\left(\mu_X - \mu_Y, \frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{m}\right)$$

Αντιστρεπτή ποσότητα $\dfrac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_X^2}{n} + \dfrac{\sigma_Y^2}{m}}} \sim N(0,1)$ (1)

Δ.Ε. $(1-a)\%$ ελαχίστου μήκους $\bar{X} - \bar{Y} \pm z_{a/2}\sqrt{\dfrac{\sigma_X^2}{n} + \dfrac{\sigma_Y^2}{m}}$

2) σ_X^2 , σ_Y^2 άγνωστα , $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = \sigma^2$

Από την (1) $\Rightarrow \dfrac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_X - \mu_Y)}{\sigma\sqrt{\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{m}}} \sim N(0,1)$ (2)

$$\left.\begin{aligned} &\frac{(n-1)S_X^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1} \\ &\frac{(m-1)S_Y^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{m-1} \\ &S_X^2 \perp S_Y^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{(n-1)S_X^2 + (m-1)S_Y^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n+m-2} \qquad (3)$$

Από (2) και (3)

$$\Rightarrow \frac{\dfrac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_X-\mu_Y)}{\sigma\sqrt{\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{m}}}}{\sqrt{\dfrac{(n-1)S_X^2+(m-1)S_Y^2}{\sigma^2} \Big/ n+m-2}} = \frac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_X-\mu_Y)}{S_p\sqrt{\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{m}}} \sim t_{n+m-2}$$

όπου $S_p^2 = \dfrac{(n-1)S_X^2+(m-1)S_Y^2}{n+m-2}$, $E\left(S_p^2\right)=\sigma^2$

p : pooled (δηλ. S_p^2 αμερόληπτη εκτιμήτρια του σ^2)

Δ.Ε. $(1-a)\%$ ελαχίστου μήκους $\bar{X}-\bar{Y} \pm t_{n+m-2;a/2} S_p\sqrt{\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{m}}$

3) Δ.Ε. για την παράμετρο $\dfrac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2}$, $\sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{(n-1)S_X^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1} \\ \dfrac{(m-1)S_Y^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{m-1} \\ S_X^2 \perp S_Y^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\dfrac{(n-1)S_X^2}{\sigma_X^2} \Big/ (n-1)}{\dfrac{(m-1)S_Y^2}{\sigma_Y^2} \Big/ (m-1)} \sim F_{n-1;m-1}$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma_Y^2}{\sigma_X^2}\frac{S_X^2}{S_Y^2} \sim F_{n-1;m-1}$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2}\frac{S_Y^2}{S_X^2} \sim F_{m-1;n-1}$$

$$F_{m-1;n-1;1-a/2} \leq \frac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2}\frac{S_Y^2}{S_X^2} \leq F_{m-1;n-1;a/2}$$

$$\Rightarrow \frac{S_X^2}{S_Y^2}F_{m-1;n-1;1-a/2} \leq \frac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2} \leq \frac{S_X^2}{S_Y^2}F_{m-1;n-1;a/2}$$

$(1-a)\%$ Δ.Ε. για το $\dfrac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2}$ $\left(\dfrac{S_X^2}{S_Y^2}F_{m-1;n-1;1-a/2}, \dfrac{S_X^2}{S_Y^2}F_{m-1;n-1;a/2}\right)$

$(1-a)\%$ Δ.Ε. για το $\dfrac{\sigma_Y}{\sigma_X}$ $\left(\sqrt{\dfrac{S_X^2}{S_Y^2}F_{m-1;n-1;1-a/2}}, \sqrt{\dfrac{S_X^2}{S_Y^2}F_{m-1;n-1;a/2}}\right)$

<u>Παράδειγμα 4</u>

Έστω τυχαίο δείγμα

$(X_1,Y_1),\ldots,(X_n,Y_n)$

από τη Διδιάστατη Κανονική κατανομή

$$\begin{array}{ll} E(X_i)=\mu_X & Var(X_i)=\sigma_X^2 \\ E(Y_i)=\mu_Y & Var(Y_i)=\sigma_Y^2 \end{array} \qquad i=1,2,\ldots,n$$

$\rho=$ συντελεστής συσχέτισης

Αναζητώ $(1-a)\%$ Δ.Ε. για την παράμετρο $\mu_X-\mu_Y$

Ορίζω $D_i := X_i - Y_i$

$\Rightarrow\ \bar{D}=\bar{X}-\bar{Y}$

$$S_D^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(D_i-\bar{D})^2$$

$(1-a)\%$ Δ.Ε. $\quad \bar{D}\pm t_{n-1;a/2}\dfrac{S_D}{\sqrt{n}}$

<u>Άσκηση</u>

$X_1,\ldots,X_n\ \tau.\delta. \sim f(x;\theta_1;\theta_2)=\dfrac{\theta_2}{\theta_1}x^{\theta_2-1}e^{-\frac{x^{\theta_2}}{\theta_1}}$, $x>0$, $\theta_1,\theta_2>0$

θ_2 γνωστό

1) Να δειχθεί ότι η $Q=\dfrac{2\sum_{i=1}^{n}X_i^{\theta_2}}{\theta_1}$ είναι αντιστρεπτή ποσότητα για το θ_1

Έστω $Q=\sum_{i=1}^{n}Y_i$,

$$Y_i=2\frac{X_i^{\theta_2}}{\theta_1}\Rightarrow X=\left(\frac{\theta_1 Y}{2}\right)^{1/\theta_2}$$

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\theta_2}\left(\frac{\theta_1 y}{2}\right)^{1/\theta_2-1}\frac{\theta_1}{2}$$

$$f_Y(y)=f_Y(x)\left|\frac{dx}{dy}\right|=\frac{\theta_2}{\theta_1}\left[\left(\frac{\theta_1 y}{2}\right)^{1/\theta_2}\right]^{\theta_2-1}e^{-\frac{\left(\left(\frac{\theta_1 y}{2}\right)^{1/\theta_2}\right)^{\theta_2}}{\theta_1}}\frac{\theta_1}{2\theta_2}\left(\frac{\theta_1 y}{2}\right)^{1/\theta_2-1}=\frac{1}{2}e^{-y/2} \quad , \ y>0$$

$Y\sim \mathcal{X}_2^2 \Rightarrow Y_i\sim \mathcal{X}_2^2$

Άρα $Q=\sum_{i=1}^{n}Y_i\sim \mathcal{X}_{2n}^2$

2) Να δοθεί ένα $(1-a)\%$ Δ.Ε. για το θ_1

$$\mathcal{X}^2_{2n;1-a/2} \le \frac{2\sum_{i=1}^{n} X_i^{\theta_2}}{\theta_1} \le \mathcal{X}^2_{2n;a/2}$$

$$\frac{2\sum_{i=1}^{n} X_i^{\theta_2}}{\mathcal{X}^2_{2n;a/2}} \le \theta_1 \le \frac{2\sum_{i=1}^{n} X_i^{\theta_2}}{\mathcal{X}^2_{2n;1-a/2}}$$

II) Γενική Μέθοδος Εύρεσης Διαστημάτων

$X_1,\dots,X_n\ \tau.\delta. \sim f(x;\theta)$
T εκτιμήτρια της θ
Κατανομή της $T \quad f_T(t,\theta)$
Αναζητώ συναρτήσεις $h_1(\theta)$ και $h_2(\theta)$
τ.ω. $P\big(h_1(\theta)\le T\le h_2(\theta)\big)=1-(p_1+p_2) \qquad (1)$
όπου $0\le p_1+p_2\le 1$
$0\le p_1+p_2\le a$

Παράδειγμα 1
$X_1,\dots,X_n\ \tau.\delta. \sim U(0;\theta)$

$T=\max X_i$
T επαρκής και πλήρης και ΕΜΠ

$$f_T(t,\theta)=\frac{n}{\theta}\left(\frac{t}{\theta}\right)^{n-1} \quad , \quad 0\le t\le\theta$$
$$=\frac{nt^{n-1}}{\theta^n} \quad , \quad 0\le t\le\theta$$

Αναζητώ $h_1(\theta)$ και $h_2(\theta)$

$$\int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} f_T(t,\theta)dt=\int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)}\frac{nt^{n-1}}{\theta^n}dt=1-(p_1+p_2) \quad \text{από την (1)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \displaystyle\int_0^{h_1(\theta)}\frac{nt^{n-1}}{\theta^n}dt=p_1\Rightarrow\frac{\left(h_1(\theta)\right)^n}{\theta^n}=p_1\Rightarrow h_1(\theta)=\theta\, p_1^{1/n} \\ \displaystyle\int_{h_2(\theta)}^{\theta}\frac{nt^{n-1}}{\theta^n}dt=p_2\Rightarrow\frac{\left(\theta-h_2(\theta)\right)^n}{\theta^n}=p_2\Rightarrow h_2(\theta)=\theta(1-p_2)^{1/n} \end{cases}$$

Με πιθανότητα $1-(p_1+p_2)$

$$\theta p_1^{1/n}\le T\le\theta(1-p_2)^{1/n}$$
$$\Rightarrow\frac{p_1^{1/n}}{T}\le\frac{1}{\theta}\le\frac{(1-p_2)^{1/n}}{T}$$
$$\Rightarrow T(1-p_2)^{-1/n}\le\theta\le Tp_1^{-1/n}$$

Αναζητώ τώρα Δ.Ε. $(1-a)\%$

$p_1+p_2=a$

$$L=Tp_1^{-1/n}-T(1-p_2)^{-1/n}=T\left[p_1^{-1/n}-(1-p_2)^{-1/n}\right]=T\left\{p_1^{-1/n}-\left[1-(a-p_1)\right]^{-1/n}\right\}$$
$$=T\left[p_1^{-1/n}-(1-a+p_1)^{-1/n}\right]$$
$$\frac{\partial L}{\partial p_1}=T\left[-\frac{1}{n}p_1^{-1/n-1}+\frac{1}{n}(1-a+p_1)^{-1/n-1}\right]=-\frac{T}{n}\left[p_1^{-1/n-1}-(1-a+p_1)^{-1/n-1}\right]$$

$$p_1 \le (1-a) + p_1 \Rightarrow p_1^{-1/n-1} \ge (1-a+p_1)^{-1/n-1}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial p_1} \le 0 \Rightarrow L \searrow$$

$0 \le p_1 + p_2 \le 1$

$p_1 + p_2 = a \Rightarrow p_2 = a - p_1$

$0 \le p_1 \le p_1 + p_2 = a \Rightarrow 0 \le p_1 \le a$

Άρα

$$\left.\begin{array}{l} 0 \le p_1 \le a \\ p_1 + p_2 = a \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} p_1 = a \\ p_2 = 0 \end{array}$$

$(1-a)\%$ Δ.Ε. ελαχίστου μήκους για το θ από την $U(0;\theta)$ $\left(T,\ Ta^{-1/n}\right)$

III) Ασυμπτωτικά Διαστήματα Εμπιστοσύνης

(I) Κεντρικό Οριακό Θεώρημα(Κ.Ο.Θ.)

$$\left.\begin{array}{l} X_1,\ldots,X_n\ \tau.\delta. \\ E(X_i)=\mu \\ Var(X_i)=\sigma^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \underset{n\to\infty}{\overset{D}{\Longrightarrow}} N(0,1)$$

Προσεγγιστικά Δ.Ε.

1) σ^2 γνωστό

   $(1-a)\%$ Δ.Ε. για το μ $\quad \bar{X} \pm z_{a/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

2) σ^2 άγνωστο

   $(1-a)\%$ Δ.Ε. για το μ $\quad \bar{X} \pm z_{a/2}\dfrac{S}{\sqrt{n}}$ $\quad$ ($z_{a/2}$ γιατί όταν $n\to\infty$ $t_n \to N(0,1)$)

(II) Εκτιμήτρια Μεγιστης Πιθανοφάνειας

$X_1,\ldots,X_n\ \tau.\delta. \sim f(x;\theta)$

$$\frac{\hat{\theta}-\theta}{\sigma(\theta)} \underset{n\to\infty}{\overset{D}{\Longrightarrow}} N(0,1)$$

$$\sigma^2(\theta)=\frac{1}{nI(\theta)}$$

$(1-a)\%$ Δ.Ε. για το θ $\quad \hat{\theta} \pm z_{a/2}\sigma(\hat{\theta})$

Παράδειγμα 1

$X_1,\ldots,X_n \sim \mathrm{E}(\theta)$

$f(x;\theta)=\theta e^{-\theta x}$, $x>0$

$\hat{\theta}=\dfrac{1}{\bar{X}}$ Ε.Μ.Π.

$I(\theta)=\dfrac{1}{\theta^2}$

$$\sigma^2(\theta)=\frac{1}{n\,1/\theta^2}=\frac{\theta^2}{n}$$

$$\sigma^2(\hat{\theta})=\frac{\hat{\theta}^2}{n}=\frac{1}{n\bar{X}^2}$$

Άρα $(1-a)\%$ Δ.Ε. για το θ $\quad \dfrac{1}{\bar{X}} \pm z_{a/2}\dfrac{1}{\bar{X}\sqrt{n}}$

Παράδειγμα2

(α) Σε δείγμα 200 ατόμων, 80 ψηφίζουν υπέρ του Α. Να βρεθεί 95% Δ.Ε. για το ποσοστό του Α.

X = ο αριθμός των ατόμων που ψηφίζουν υπέρ του Α

$X \sim Bin(200, p)$

Ε.Μ.Π. $\hat{p} = \frac{X}{n} = \frac{80}{200} = \frac{2}{5}$

$I(p) = \frac{n}{p(1-p)}$

$\sigma^2(p) = \frac{p(1-p)}{n}$

Άρα $(1-a)\%$ Δ.Ε. για το p $\quad \hat{p} \pm z_{a/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$

Αντικαθιστώντας , Δ.Ε. $(0.33, 0.47)$

(β) Να βρεθεί ένα Δ.Ε. για τη διαφορά $(p_1 - p_2)$

όταν $X \sim Bin(n_1, p_1)$

$Y \sim Bin(n_2, p_2)$

$X \perp Y$

$\hat{p}_1 = \frac{X}{n_1} \qquad \frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1}}} \xrightarrow{D} N(0,1)$

$\hat{p}_2 = \frac{Y}{n_2} \qquad \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{\sqrt{\frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}} \xrightarrow{D} N(0,1)$

Άρα $\hat{p}_1 - \hat{p}_2 \xrightarrow{D} N\left(p_1 - p_2, \frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}\right)$

$(1-a)\%$ Δ.Ε. για το $(p_1 - p_2)$

$\hat{p}_1 - \hat{p}_2 \pm z_{a/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}$