Ασκήσεις

1. Να δειχθεί ότι ο μέσος όρος $\overline{X}$ ενός τυχαίου δείγματος μεγέθους n από την κατανομή $f(\chi,\theta)=\frac{1}{\theta}e^{-\chi/\theta}$, $\chi>0$, $\theta>0$, , είναι αμερόληπτος εκτιμητής του θ με διακύμανση θ^2/n .

2. Έστω $X_1,\ldots,X_n$ τ.δ. από την κανονική κατανομή με μέση τιμή 0 και διακύμανση θ, θ > 0. Δείξτε ότι $\sum_{i=1}^{n} X_i^{\;2} \big/ n$ είναι αμερόληπτος εκτιμητής του θ ο οποίος έχει διακύμανση $2\theta^2/n$.

3. Έστω $Y_1 < Y_2 < Y_3$ το διατεταγμένο στατιστικό ενός τυχαίου δείγματος μεγέθους 3 από την ομοιόμορφη κατανομή στο (0,θ), θ>0. Να δειχθεί ότι οι εκτιμητές $4Y_1$, $2Y_2$, και $\frac{4}{3}Y_3$ είναι όλοι αμερόληπτοι εκτιμητές του θ. Να βρεθεί η διακύμανση του κάθε εκτιμητή.

4. Έστω Y_1 και Y_2 δύο ανεξάρτητοι εκτιμητές του θ. Έστω ότι η διακύμανση του Y_1 είναι διπλάσια από τη διακύμανση του Y_2. Βρείτε τις σταθερές κ_1 και κ_2 έτσι ώστε $\kappa_1 Y_1 + \kappa_2 Y_2$ να είναι αμερόληπτος εκτιμητής του θ με την ελάχιστη διακύμανση για αυτόν το γραμμικό συνδυασμό.

5. Έστω X τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας f(χ, θ), όπου το θ ανήκει σε ένα ανοικτό σύνολο Θ. Έστω $I_0(\theta)$ η πληροφορία Fisher για το θ στη X. Έστω ότι θεωρούμε την παράμετρο μ, όπου θ = ψ(μ) και ψ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Αν $I_1(\mu)$ είναι η πληροφορία Fisher για το μ να δειχθεί ότι $I_1(\mu) = (\psi'(\mu))^2\, I_0(\psi(\mu))$.

6. Έστω X μια παρατήρηση από την κανονική κατανομή με μέση τιμή 0 και τυπική απόκλιση σ (άγνωστη). Βρείτε έναν αμερόληπτο εκτιμητή του σ, υπολογίστε την διακύμανσή του και να αποδείξετε ότι η διακύμανσή του είναι μεγαλύτερη από το κάτω φράγμα της Cramer - Rao για κάθε σ > 0.

7. Έστω $X_1,\ldots,X_n$ τυχαίο δείγμα από την κανονική κατανομή με μέση τιμή 0 και τυπική απόκλιση σ (άγνωστη). Βρείτε το κάτω φράγμα της Cramer – Rao για τη διακύμανση κάθε αμερόληπτου εκτιμητή του $\log\sigma$.

8. Έστω $X_1,\ldots,X_n$ τυχαίο δείγμα από την Poisson με παράμετρο θ. Ας είναι Υ = $\sum_{i=1}^{n} X_i$.
(α) Να υπολογιστεί η τιμή της σταθεράς c έτσι ώστε ο εκτιμητής e^{-cY} να είναι αμερόληπτος για την παράμετρο $e^{-\theta}$.
(β) Να υπολογιστεί το κάτω φράγμα της Cramer – Rao για τη διακύμανση κάθε αμερόληπτου εκτιμητή του $e^{-\theta}$.

9. Έστω $X_1,\ldots,X_n$, τυχαίο δείγμα από την f(χ, θ) όπου $\theta \in \Theta$. Θεωρώ Τ = $h(X_1,\ldots,X_n)$ και Τ΄ = $h'(X_1,\ldots,X_n)$ και υποθέτω ότι η στατιστική συνάρτηση Τ΄ είναι 1-1 και επί συνάρτηση του Τ. Να δειχτεί ότι η Τ είναι επαρκής αν και μόνον αν η Τ΄ είναι επαρκής για την παράμετρο θ .

10. Έστω $X_1,\ldots,X_n$ τυχαίο δείγμα από την Be(α, β), όπου το α είναι γνωστό και το β άγνωστο. Να δειχτεί ότι η στατιστική συνάρτηση Τ = $\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\log\frac{1}{1-X_i}\right)^4$ είναι επαρκής για το β.

11. Έστω τυχαίο δείγμα από n παρατηρήσεις από την P(θ), όπου το θ είναι άγνωστο. Να βρεθεί Α.Ο.Ε.Δ. εκτιμήτρια της παραμέτρου β = $e^{-\theta}$.

12. Έστω $X_1,\ldots,X_n$ τυχαίο δείγμα από την κατανομή $f(\chi,\theta) = \begin{cases} e^{-(\chi-\theta)}, & \chi \succ \theta, \quad \theta \in \Re \\ 0, & \alpha\lambda\lambda o\iota\acute{\omega}\varsigma \end{cases}$. Βρείτε τον Α.Ο.Ε.Δ. εκτιμητή του θ .

13. Έστω $X_1,\ldots,X_n$ τυχαίο δείγμα από την κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(\chi, \theta) = \theta\, \chi^{\theta-1}$, 0<χ<1, με θ άγνωστο. Να βρεθεί ο Ε.Μ.Π. της θ.

14. Έστω $X_1,\ldots,X_n$ τυχαίο δείγμα από την $U(\theta_1, \theta_2)$, με θ_1, θ_2 άγνωστα. Να βρεθούν οι Ε.Μ.Π. των θ_1 και θ_2.

15. Έστω $(X_1,Y_1),\ldots,(X_n,Y_n)$, τυχαίο δείγμα από τη διδιάστατη κανονική κατανομή με μέση τιμή $\begin{pmatrix}\mu_X \\ \mu_Y\end{pmatrix}$, διακυμάνσεις σ_X^2 , σ_Y^2 και συντελεστή συσχέτισης ρ. Να βρεθούν οι εκτιμητές μέγιστης πιθανοφάνειας αυτών των πέντε παραμέτρων.

16. Έστω $X_1,\ldots,X_n$ τυχαίο δείγμα από την εκθετική κατανομή με άγνωστη παράμετρο β. Να βρεθεί ο Ε.Μ.Π. της διαμέσου αυτής της κατανομής.

17. Το ποσοστό αγορών p για κάποιο προϊόν που γίνεται από γυναίκες, είναι άγνωστο. Αν σε ένα τυχαίο δείγμα 70 πελατών γνωρίζουμε ότι οι 58 ήταν γυναίκες, να εκτιμηθεί το p αν : (i) Γνωρίζω ότι το $p\in(0,1)$.
(ii) Γνωρίζω ότι το $p\in[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$.

18. Έστω $X_1,\ldots,X_n$ τυχαίο δείγμα από την κατανομή $P(X_i = \chi) = p(1-p)^{\chi-\theta}$, $0 < p < 1$, $\chi = \theta, \theta+1, \ldots$, $i=1,\ldots,n$, $p\in(0,1)$, και $\theta\in\Re$.
(α) Να βρεθεί ένα επαρκές στατιστικό για τις παραμέτρους (p,θ).
(β) Να υπολογιστεί ο Ε.Μ.Π. των παραμέτρων (p,θ).

19. Έστω φ συνάρτηση πραγματική, 1-1. Έστω X τυχαία μεταβλητή με σ.π.π.

$$f_\sigma(\chi) = \frac{\phi^{-1}(\chi)}{\sigma^2\phi'(\phi^{-1}(\chi))}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\left(\phi^{-1}(\chi)\right)^2-\left(\phi^{-1}(L)\right)^2\right]}, \qquad \chi \succ L.$$

Να βρεθεί ο Ε.Μ.Π. του σ^2 και να δοθεί η ασυμπτωτική του κατανομή αν έχουμε τυχαίο δείγμα μεγέθους n από αυτήν την κατανομή.

20. Υποθέτουμε ότι ο χρόνος αναμονής ο οποίος απαιτείται για να εξυπηρετηθεί ένας πελάτης ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο θ, άγνωστη. Γνωρίζουμε ότι η εκ των προτέρων κατανομή της θ είναι Γάμμα με μέση τιμή 0.2 και τυπική απόκλιση 1. Αν ο μέσος χρόνος αναμονής εξυπηρέτησης για ένα τυχαίο δείγμα 20 πελατών είναι 3.8, να βρεθεί η εκ των υστέρων κατανομή του θ.

21. Έστω $X_1,\ldots,X_n$ τυχαίο δείγμα από την αρνητική διωνυμική με παραμέτρους r και p, p άγνωστο. Υποθέτω ότι η εκ των προτέρων κατανομή του p είναι Be(a,b). Να βρεθεί η εκ των υστέρων κατανομή του p.

22. Έστω π(θ) η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας που ορίζεται από

$$\pi(\theta) = \begin{cases} \dfrac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\theta^{-(\alpha+1)}e^{-\beta/\theta}, & \theta > 0 \\ 0, & \theta \le 0 \end{cases}, \qquad \text{όπου } \alpha,\beta > 0.$$

(i) Να δειχθεί ότι η π έχει ολοκλήρωμα ίσο με 1.
(ii) Έστω $X_1,\ldots,X_n$ τυχαίο δείγμα από $N(\mu, \sigma^2)$, μ γνωστό και σ^2 άγνωστο. Υποθέτω ότι η εκ των προτέρων κατανομή του σ^2 είναι π. Να βρεθεί η εκ των υστέρων κατανομή του σ^2,

23. Έστω μια παρατήρηση $X \sim U(\theta - \frac{1}{2}, \theta + \frac{1}{2})$, θ άγνωστο. Υποθέτω ότι η εκ των προτέρων κατανομή του θ είναι U(10, 20). Αν η παρατηρηθείσα τιμή του X είναι 12, ποια είναι η εκ των υστέρων κατανομή της θ;

24. Έστω $X_1,..,X_n$ τυχαίο δείγμα από την U(θ - α, θ + β). Να βρεθεί εκτιμήτρια του θ με τη μέθοδο των ροπών και να υπολογιστεί η αναμενόμενή της τιμή και η διασπορά της.

25. Έστω $X_1,...,X_n$ τυχαίο δείγμα από την Be(α, β). Να βρεθούν οι εκτιμήτριες των α και β χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των ροπών.

26. Έστω $X_1,...,X_n$ τυχαίο δείγμα από την $f(\chi.\theta) = \frac{2}{\theta^2}(\theta - \chi)$, $0 < \chi < \theta$. Να προσδιοριστεί εκτιμήτρια του θ με τη μέθοδο των ροπών.

27. Ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις πκνότητας πιθανότητας ανήκουν στην εκθετική οικογένεια κατανομών;
(α) U (0, θ)
(β) N (θ, θ^2)
(γ) $f(\chi,\theta) = \frac{2(\chi+\theta)}{1+2\theta}$, $0 < \chi < 1$, $\theta > 0$
(δ) $p(\chi, \theta) = \exp\{-2\log\theta + \log 2\chi\}$, $0 < \chi < \theta$.

28. Έστω το τυχαίο σημείο (X, Y) $\in \Re^2$, όπου X, Y ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν την κανονική κατανομή με μέση τιμή μ= 0 και διακύμανση $\sigma^2 = 1$. Αν θεωρήσω τυχαίο κύκλο στο $\Re^2$, να προσδιοριστεί η μικρότερη ακτίνα r, έτσι ώστε το σημείο (X, Y) να ανήκει στον κύκλο με πιθανότητα 0.99.

29. Έστω $X_1,...,X_n$ τυχαίες μεταβλητές με συνεχείς α.σ.κ. $F_i(\chi)$. Ορίζω την τυχαία μεταβλητή $Y = -2\sum_{i=1}^{n}\log F_i(X_i)$. Να αποδειχθεί ότι η κατανομή της Y είναι χ^2_{2n} .

30. Έστω $X_1,...,X_5$ τυχαίο δείγμα από την N(0, 1). Βρείτε την τιμή της c έτσι ώστε η τυχαία μεταβλητή $\frac{c(X_1+X_2)}{(X_3^2+X_4^2+X_5^2)^{1/2}}$ να έχει την t κατανομή.

31. Έστω X_1, X_2 τυχαίο δείγμα από την N(0, σ^2). Να υπολογιστεί η $P\left(\frac{(X_1+X_2)^2}{(X_1-X_2)^2} > 4\right)$.

32. Έστω X τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την F κατανομή με m και n βαθμούς ελευθερίας. Να αποδειχθεί ότι $E(X) = n/(n-2)$, $n > 2$.

33. Να υπολογισθεί η διάμεσος της F κατανομής με m και n βαθμούς ελευθερίας όταν m = n .

34. Έστω $X_1,\ldots,X_n$ τυχαίο δείγμα από μια συνεχή συνάρτηση κατανομής με διάμεσο m.

    (α) Να δειχθεί ότι $P(\min X_i < m < \max X_i) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

    (β) Για τις παρακάτω μετρήσεις: 2.84, 3.54, 2.80, 1.44, 2.94, 2.70, να προσδιοριστεί ένα 97% διάστημα εμπιστοσύνης για τη διάμεσό τους.

    (γ) 'Εστω $X_{(2)}$ το δεύτερο ελάχιστο διατεταγμένο στατιστικό απο τα X, και έστω $X_{(n-1)}$ το δεύτερο μέγιστο. Ποιος είναι ο βαθμός εμπιστοσύνης του Δ.Ε. $(X_{(2)}, X_{(n-1)})$ για τη διάμεσο m ;

35. Δίνονται τα παρακάτω αποτελέσματα ενός διαγωνίσματος (στα 100) :

69.5	71.9	72.6	73.1	73.3	73.5	75.5	75.7	75.8	76.1	76.2
77	77.9	78.1	76.2	79.6	79.7	79.9	80.1	82.2	83.7	93.7

    Δώστε ένα 99% διάστημα εμπιστοσύνης για την τυπική απόκλιση υποθέτοντας ότι το δείγμα προέρχεται από την κανονική κατανομή.

36. Έστω $X_1,\ldots,X_n$ τυχαίο δείγμα από την $N(\mu, \sigma^2)$. Θα θέλαμε να προβλέψουμε την τιμή της X_{n+1}, μιας μελλοντικής παρατήρησης. Προφανώς ο $\overline{X}$ είναι εκτιμητής της μελλοντικής πρόβλεψης. Αν θεωρήσω το σφάλμα πρόβλεψης ως $\overline{X} - X_{n+1}$, να βρεθεί ένα διάστημα πρόβλεψης για την X_{n+1} , με βαθμό εμπιστοσύνης (1-α)% .

37. Σε κάποιο πείραμα στο οποίο μελετήθηκαν δύο είδη λιπάσματος για κάποια καλλιέργεια, τα ποσοστά αύξησης της σοδείας είναι τα ακόλουθα:

Λίπασμα #1	28.5	24.7	26.2	23.9	29.6
Λίπασμα #2	38.7	41.6	35.9	41.8	43.8

    Αν υποθέσουμε κανονικούς πληθυσμούς, να δοθεί ένα 95% Δ.Ε. για τη διαφορά των δύο μέσων ποσοστών αύξησης.

38. Μετρήσεις στην τιμή δύο αυτοκινήτων σε διαφορετικές αντιπροσωπείες έχουν καταγραφεί:

	Αντιπροσωπείες								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Αυτοκίνητο #1	4459	4320	4268	4585	4736	4262	4440	4398	4823
Αυτοκίνητο #2	4348	4385	4231	4516	4550	4203	4285	4408	4570

    Δώστε ένα 95% Δ.Ε. για τη μέση διαφορά των τιμών.

39. Έστω $X_1,\dots,X_n$ τυχαίο δείγμα από την $N(\theta, \sigma^2)$, με άγνωστο θ, αλλά γνωστό σ^2. Έστω ότι η εκ των προτέρων κατανομή του θ είναι $N(\mu, v^2)$.
(α) Βρείτε το Δ.Ε. ελαχίστου μήκους I, $P(\theta \in I \,/\, X_1,\dots,X_n) = 0.95$ όπου η παραπάνω πιθανότητα υπολογίζεται από την εκ των υστέρων κατανομή.
(β) Τι συμβαίνει για το διάστημα I όταν $v^2 \to \infty$.

40. Έστω $X_1,\dots,X_m \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$ και $Y_1,\dots,Y_n \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$. Υποθέτουμε ότι όλοι οι παράμετροι είναι άγνωστοι, αλλά $\dfrac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2} = d$, όπου d γνωστή σταθερά.
Έστω

$$\overline{X} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i\,,\quad \overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i\,,\quad S_X^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}\left(X_i - \overline{X}\right)^2,\quad S_Y^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \overline{Y}\right)^2 \;..$$

Να δειχτεί ότι :

(α) $$\frac{\left(\overline{X}-\overline{Y}\right)-\left(\mu_X-\mu_Y\right)}{\sqrt{d\dfrac{\sigma_Y^2}{m}+\dfrac{\sigma_Y^2}{n}}} \sim N(0,1)$$

(β) $$\frac{(m-1)S_X^2}{d\sigma_Y^2}+\frac{(n-1)S_Y^2}{\sigma_Y^2} \sim \chi^2_{n+m-2}$$

(γ) Οι δύο τυχαίες μεταβλητές στα (α) και είναι ανεξάρτητες
(δ) Να κατασκευαστεί μια αντιστρεπτή ποσότητα για το (μ_X, μ_Y) η οποία έχει την t κατανομή. Με βάση αυτήν να δοθεί ένα $(1 - \alpha)\%$ Δ.Ε. για το $\mu_X - \mu_Y$.

41. Έστω $X_1,\dots,X_n$ τυχαίο δείγμα από την Εκθ (θ) ; $f(\chi, \theta) = \theta e^{-\theta \chi}$, $\chi \ge 0$, $\theta > 0$.
(α) Να δειχτεί ότι η $W = 2\theta\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \chi^2_{2n}$.
(β) Να κατασκευαστεί ένα $(1 - \alpha)\%$ Δ.Ε. με βάση την W .
(γ) Αν $n = 7$ και $\overline{X} = 93.6$, δώστε τα άκρα αυτού του διαστήματος εμπιστοσύνης με βαθμό εμπιστοσύνης 90% .

42. Έστω X, Y τυχαίες μεταβλητές οι οποίες μετρούν τη συγκέντρωση χρωμίου στο αίμα για υγιή και μη υγιή άτομα. Υποθέτοντας ότι $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$ και $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ και ότι έχουμε $n = 8$ παρατηρήσεις από τη X,
15 23 12 18 9 28 11 10
και $m = 10$ παρατηρήσεις από τη Y,
25 20 35 15 40 16 10 22 18 32
(α) δώστε μίαν εκτίμηση για την ποσότητα σ_X^2 / σ_Y^2 ,
(β) βρείτε ένα 95% διάστημα εμπιστοσύνης για το σ_X^2 / σ_Y^2 .

43. Έστω p το ποσοστό υποστηρικτών της θανατικής ποινής. Αν έχω τυχαίο δείγμα 1234 ατόμων που έδωσε 864 ψήφους υπέρ της θανατικής ποινής, να δοθεί ένα 95% διάστημα εμπιστοσύνης για το p.

44. Έστω X τυχαία μεταβλητή, $X \sim N(\mu, 4.84)$. Βρείτε το δειγματικό μέγεθος n το οποίο χρειάζεται έτσι ώστε το μέγιστο σφάλμα του εκτιμητή ($z_{\alpha/2}$, $\sigma/\sqrt{n}$) να είναι 0.4.

Σημείωση για τις ασκήσεις 45., 46., 47.
Θεωρούμε το ακόλουθο πρόβλημα ελέγχου υποθέσεων $H_0 : \theta \in \Omega_0$ προς $H_1 : \theta \in \Omega_1$ και έστω C η κρίσιμη περιοχή. Η συνάρτηση ισχύος του ελέγχου ορίζεται από $\pi(\theta) = P(\chi \in C \,/\theta)$, $\theta \in \Omega$, ενώ το μέγεθος του ελέγχου ορίζεται από $\alpha = \sup_{\theta \in \Omega_0} \pi(\theta)$.

45. Έστω $X_1,\ldots,X_n$ τυχαίο δείγμα από την $U(0, \theta)$ και έστω ότι έχουμε τον έλεγχο $H_0 : \theta \geq 2$ προς $H_1 : \theta < 2$.
Έστω $Y_{(n)} = \max(X_1,\ldots,X_n)$ και θεωρούμε την ελεγχοσυνάρτηση της οποίας η κρίσιμη περιοχή δίνεται από $Y_{(n)} \leq 1.5$.
(α) Να υπολογιστεί η συνάρτηση ισχύος.
(β) Να υπολογιστεί το μέγεθος του ελέγχου.

46. Έστω p το ποσοστό των ελαττωματικών προϊόντων και θέλω να ελέγξω την υπόθεση $H_0 : p = 2/10$ προς $H_1 : p \neq 2/10$
Έστω τυχαίο δείγμα μεγέθους 20 και συμβολίζω με Y τον αριθμό ελαττωματικών προϊόντων στο δείγμα. Θεωρώ την ελεγχοσυνάρτηση της οποίας η κρίσιμη περιοχή δίνεται από $Y \geq 7$ ή $Y \leq 1$.
(α) Να υπολογιστεί η συνάρτηση ισχύος $\pi(p)$ στα σημεία p = 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9 και 1. Να δοθεί η γραφική της παράσταση.
(β) Να υπολογιστεί το μέγεθος του ελέγχου.

47. Θεωρώ τις παρακάτω συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας $f_0(\chi) = 1$, $\chi \in [0,1]$ και $f_1(\chi) = 2\chi$, $\chi \in [0,1]$.
Έστω X μια παρατήρηση από την $f(\chi)$, που μπορεί να είναι η $f_0(\chi)$ είτε η $f_1(\chi)$. Θέλουμε να ελέγξουμε την $H_0 : f(\chi) = f_0(\chi)$ προς $H_1 : f(\chi) = f_1(\chi)$.
(α) Να βρεθεί ισχυρότατος έλεγχος επιπέδου σημαντικότητας 0.1 .
(β) Για τον έλεγχο από το (α), να βρεθεί το σφάλμα τύπου II.

48. Έστω $X_1,\ldots,X_n$ από $N(\mu, \sigma^2)$, μ γνωστό. Θέλουμε να ελέγξουμε $H_0 : \sigma^2 = 2$ προς $H_1 : \sigma^2 = 3$.
(α) Να βρεθεί ο ισχυρότατος έλεγχος επιπέδου σημαντικότητας 0.05.
(β) Για n = 8, να δοθεί ακριβής περιγραφή της κρίσιμης περιοχής από το (α).

49. Έστω $X_1,\ldots,X_n$ τυχαίο δείγμα από την $G(\alpha, \beta)$ με α γνωστό και β άγνωστο. Να δειχθεί ότι η από κοινού κατανομή των $X_1,\ldots,X_n$ έχει μονότονο λόγο πιθανοφάνειας ως προς τη στατιστική συνάρτηση $-\overline{X}_n$.

50. Έστω 4 παρατηρήσεις οι οποίες προέρχονται από κανονικό πληθυσμό με άγνωστη μέση τιμή και διακύμανση 1. Έστω ότι ελέγχουμε $H_0 : \mu \geq 10$ προς $H_1 : \mu < 10$.
(α) Βρείτε τον Ο.Ι.Ε. με επίπεδο σημαντικότητας $\alpha = 0.1$.
(β) Βρείτε την ισχύ του ελέγχου όταν $\mu = 9$.
(γ) Να δοθεί η πιθανότητα αποδοχής της H_0 αν $\mu = 11$.

51. Έστω $X_1,...,X_8$ παρατηρήσεις από την κατανομή με σ.π.π. $f(\chi, \theta) = \theta\chi^{\theta-1}$, $0<\chi<1$. Έστω ότι η τιμή του θ είναι άγνωστη και ελέγχουμε $H_0 : \theta \leq 1$ προς $H_1 : \theta > 1$. Δείξτε ότι ο Ο.Ι.Ε. επιπέδου σημαντικότητας $\alpha = 0.05$ απορρίπτει την H_0 αν $\sum_{i=1}^{n} \log X_i \geq -3.981$.

52. Έστω X παρατήρηση από την Cauchy με
$$f(\chi / \theta) = \frac{1}{\pi[1+(\chi-\theta)^2]} \quad , \quad \chi \in \Re \ .$$
Έστω ο έλεγχος $H_0 : \theta = 0$ προς $H_1 : \theta > 0$. Να δειχθεί ότι δεν υπάρχει Ο.Ι.Ε. αυτών των υποθέσεων για κάθε επίπεδο σημαντικότητας α.

53. Έστω $X_1,...,X_n$ τυχαίο δείγμα από την κατανομή $N(\mu, 64)$.
(α) Να δειχθεί ότι ο έλεγχος που ορίζεται από την κρίσιμη περιοχή $C = \left\{ \underset{\sim}{\chi} : \overline{X} \leq c \right\}$, είναι ο ισχυρότερος για $H_0 : \mu=80$ προς $H_1 : \mu=76$.
(β) Να βρείτε n και c έτσι ώστε $\alpha = 0.05$ και $\beta = 0.05$, προσεγγιστικά.

54. Έστω $X_1,...,X_{10}$ τυχαίο δείγμα από την Poisson με μέση τιμή λ.
(α) Να δειχθεί ότι ο ομοιομόρφως ισχυρότατος έλεγχος για $H_0 : \mu = 1/2$ προς $H_1 : \mu \succ 1/2$ ορίζεται από τη στατιστική συνάρτηση $\sum_{i=1}^{10} X_i$.
(β) Ποια είναι η μορφή της κρίσιμης περιοχής αν $\alpha = 0.068$;
(γ) Να δοθεί η συνάρτηση ισχύος.

55. Έστω $X_1,...,X_n \sim N(\mu, 5)$. Θεωρούμε τις υποθέσεις $H_0 : \mu=162$ προς $H_1 : \mu \neq 162$ Αν $n = 20$, $\overline{X} = 161.1$, είναι η μηδενική υπόθεση απορριπτέα
(α) σε επίπεδο 10% ;
(β) σε επίπεδο 5% ;
(γ) Να βρεθεί η p-value του ελέγχου που χρησιμοποιείται.

56. Για τον έλεγχο $H_0 : \mu =335$ προς $H_1 : \mu \prec 335$ κάτω από παραδοχές κανονικότητας, ένα τυχαίο δείγμα μεγέθους 17 έδωσε $\overline{X} = 324.8$ και $S = 40$. Απορρίπτουμε την H_0 σε $\alpha = 10\%$ επίπεδο σημαντικότητας;

57. Έστω $X_1,\ldots,X_{121}$ τυχαίο δείγμα από κανονική, $N(\mu, \sigma^2)$. Θεωρώ τον έλεγχο $H_0 : \mu = 1.8$ προς $H_1 : \mu > 1.8$, σε 0.1 επίπεδο σημαντικότητας. Να ελεγχθεί ο έλεγχος αν το δείγμα έδωσε $\overline{X} = 1.84$ και $S = 2.20$. Να βρεθεί η p-value του ελέγχου.

58. Έστω $X_1,\ldots,X_n$ από εκθετική με παράμετρο θ. Να δειχθεί ότι ο έλεγχος πηλίκου πιθανοφάνειας για $H_0 : \theta = \theta_0$ προς $H_1 : \theta \neq \theta_0$ έχει κρίσιμη περιοχή που δίνεται από $\sum_{i=1}^{n} X_i \leq c_1$ ή $\sum_{i=1}^{n} X_i \geq c_2$.

59. Να δειχθεί ότι ο έλεγχος πηλίκου πιθανοφάνειας οδηγεί στην ίδια περιοχή με αυτήν που δίνεται από το θεώρημα Neyman – Pearson για έλεγχο απλής προς απλή.

60. Έστω $X_1,\ldots,X_n$ και $Y_1,\ldots,Y_m$ ανεξάρτητα τυχαία δείγματα από τις κανονικές $N(\theta_1, \theta_3)$ και $N(\theta_2, \theta_4)$. Να βρεθεί ο έλεγχος πηλίκου πιθανοφάνειας για $H_0 : \theta_1 = \theta_2$, $\theta_3 = \theta_4$ προς $H_1 : \theta_1 \neq \theta_2$, $\theta_3 \neq \theta_4$.

61. Έστω $\underset{\sim}{X} = (X_1,\ldots,X_k)$ τυχαίο διάνυσμα που ακολουθεί την πολυωνυμική με $(n, p_1,\ldots, p_k)$, $\sum_{i=1}^{k} X_i = n$ $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$.

(α) Να βρεθεί ο έλεγχος πηλίκου πιθανοφάνειας για τις υποθέσεις H_0 : $p_1 = p_{10},\ldots, p_k = p_{k0}$, H_1 : $p_1 \neq p_{10},\ldots, p_k \neq p_{k0}$. Έστω λ ο έλεγχος αυτός.

(β) Δίνεται ότι $-2\log\lambda \approx \sum_{i=1}^{k} \frac{(X_i - np_{i0})^2}{np_{i0}} \sim \chi^2_{k-1}$ όταν ισχύει η υπόθεση, Να εφαρμοστεί στο παρακάτω: Τέσσερα δείγματα μεγέθους 120, 100, 100 και 125 από την Poisson δίνουν μέσες τιμές 251/120, 323/100, 180/100 και 426/125. Έχουν οι πληθυσμοί ίσες μέσες τιμές;

62. Έστω $X_1,\ldots,X_{n_1} \sim f(\chi,\theta_1) = \theta_1 e^{-\theta_1 \chi_i}$, $\theta_1 > 0$ και $Y_1,\ldots,Y_{n_2} \sim f(y,\theta_2) = \theta_2 e^{-\theta_2 y_j}$, με X, Y ανεξάρτητα. Να δοθεί ο έλεγχος πηλίκου πιθανοφάνειας H_0 : $\theta_1 = \theta_2$ προς H_1 : $\theta_1 \neq \theta_2$ και να αποδειχθεί ότι μπορεί να γραφτεί σαν συνάρτηση μιας F τυχαίας μεταβλητής.

Λύσεις

1. Για να είναι ο $\overline{\mathrm{X}}$ αμερόληπτος εκτιμητής του θ, πρέπει να ισχύει $\mathrm{E}(\overline{\mathrm{X}})=\theta$. Έχουμε

$$\mathrm{E}(\mathrm{X}_i) = \int_0^{\infty} \frac{\chi}{\theta} e^{-\chi/\theta}\, d\chi = -\chi e^{-\chi/\theta} - \int_0^{\infty} -e^{-\chi/\theta}\, d\chi = -\chi e^{-\chi/\theta} - \theta e^{-\chi/\theta} \Big|_0^{\infty} = \theta \qquad [1]$$

$$\mathrm{E}(\overline{\mathrm{X}}) = \mathrm{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{X}_i\right) = \frac{1}{n}\mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{n}\mathrm{X}_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}(\mathrm{X}_i) \overset{[1]}{=} \frac{1}{n}n\theta = \theta .$$

Άρα πράγματι ο $\overline{\mathrm{X}}$ είναι αμερόληπτος εκτιμητής του θ.

$$Var(\mathrm{X}_i) = \mathrm{E}(\mathrm{X}_i^2) - \mathrm{E}^2(\mathrm{X}_i) = \int_0^{\infty} \frac{\chi^2}{\theta} e^{-\chi/\theta}\, d\chi - \theta^2 = \cdots = 2\theta^2 - \theta^2 = \theta^2 \qquad [2]$$

$$Var(\overline{\mathrm{X}}) = Var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{X}_i\right) = \frac{1}{n^2}Var\left(\sum_{i=1}^{n}\mathrm{X}_i\right) \overset{\mathrm{X}_i\ \textit{ανεξάρτητες και ισόνομες}}{=} \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}Var(\mathrm{X}_i)$$

$$= \frac{1}{n^2}n\theta^2 = \frac{\theta^2}{n} \qquad (o.\varepsilon.\delta.)$$

2. $\mathrm{X}_1,\ldots,\mathrm{X}_n \sim N(0,\theta)$, $\theta > 0$.

$$\Rightarrow \mathrm{Y} = \sum_{i=1}^{n}\mathrm{X}_i^2 \Big/ \theta \sim \mathcal{X}_n^2$$

$$\Rightarrow \mathrm{E}(\mathrm{Y}) = n \quad \text{και} \quad Var(\mathrm{Y}) = 2n \qquad [1]$$

Για να είναι ο $\sum_{i=1}^{n}\mathrm{X}_i^2 \big/ n$ αμερόληπτος εκτιμητής του θ,

αρκεί $\mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{n}\mathrm{X}_i^2 \big/ n\right) = \theta$.

<u>πρώτος τρόπος</u>

$$\mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{n}\mathrm{X}_i^2 \big/ n\right) = \frac{1}{n}\mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{n}\mathrm{X}_i^2\right) \overset{\textit{γραμμικότητα της μέσης τιμής}}{=} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}(\mathrm{X}_i^2) =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left\{Var(\mathrm{X}_i) + \mathrm{E}^2(\mathrm{X}_i)\right\} = \frac{1}{n}n(\theta + 0^2) = \theta .$$

δεύτερος τρόπος

Από την [1] ,

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \Big/ n\right) = E\left(\frac{\theta Y}{n}\right) = \frac{\theta}{n}E(Y) = \theta \quad .$$

Για τη διακύμανση του εκτιμητή,

$$Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \Big/ n\right) = \frac{1}{n^2}Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right)$$

$$= \frac{1}{n^2}Var(\theta Y) = \frac{2n\theta^2}{n^2} = \frac{2\theta^2}{n} \qquad (o.\varepsilon.\delta).$$

3. $Y_1 < Y_2 < Y_3 \sim U(0,\theta)$.

Οι περιθωριακές κατανομές των διατεταγμένων στατιστικών είναι

$$f_{Y_k}(\chi) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\{F(\chi)\}^{k-1}\{1-F(\chi)\}^{n-k} f(\chi) \quad .$$

Άρα για την ομοιόμορφη κατανομή στο $(0,\theta)$ έχουμε

$$f_{Y_k}(\chi) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\left\{\frac{\chi}{\theta}\right\}^{k-1}\left\{1-\frac{\chi}{\theta}\right\}^{n-k}\frac{1}{\theta} \quad .$$

- $f_{Y_1}(\chi) = \frac{3!}{0!2!}\left\{\frac{\chi}{\theta}\right\}^{0}\left\{1-\frac{\chi}{\theta}\right\}^{2}\frac{1}{\theta} = \frac{3}{\theta}\left(1-\frac{\chi}{\theta}\right)^2$

$$E(4Y_1) = 4E(Y_1) = 4.\frac{3}{\theta}\int_0^\theta \chi\left(1-\frac{\chi}{\theta}\right)^2 = \frac{12}{\theta^3}\int_0^\theta (\theta^2\chi - 2\chi^2\theta + \chi^3)\, d\chi =$$

$$= \frac{12}{\theta^3}\left(\frac{\theta^2\chi^2}{2} - \frac{2\chi^3\theta}{3} + \frac{\chi^4}{4}\right)\Big|_0^\theta = \frac{12}{\theta^3}.\theta^4\left(\frac{6}{12}-\frac{8}{12}+\frac{3}{12}\right) = \frac{12\theta}{12} = \theta$$

$\therefore$ Ο $4Y_1$ *είναι αμερόληπτος εκτιμητής του* θ.

Για τη διακύμανση του $4Y_1$ *έχουμε*

$$E(Y_1^2) = \frac{3}{\theta}\int_0^\theta (\chi^2\left(1-\frac{\chi}{\theta}\right)^2)\, d\chi = \frac{3}{\theta^3}\int_0^\theta (\theta^2\chi^2 - 2\chi^3\theta + \chi^4)\, d\chi$$

$$= \frac{3}{\theta^3}(\theta^2\frac{\chi^3}{3} - 2\theta\frac{\chi^4}{4} + \frac{\chi^5}{5})\Big|_0^\theta = \frac{3}{\theta^3}\theta^5\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\right) = \frac{\theta^2}{10}$$

$$Var(Y_1) = E(Y_1^2) - E^2(Y_1) = \frac{\theta^2}{10} - \frac{\theta^2}{16} = \frac{6\theta^2}{160}$$

Άρα

$$Var(4Y_1) = 4^2 Var(Y_1) = 16.\frac{6}{160}\theta^2 = \frac{3}{5}\theta^2$$

- $f_{Y_2}(\chi) = \frac{3!}{1!1!}\left\{\frac{\chi}{\theta}\right\}^1\left\{1-\frac{\chi}{\theta}\right\}^1\frac{1}{\theta} = \frac{6\chi}{\theta^2}\left(1-\frac{\chi}{\theta}\right)$

$$E(2Y_2) = 2E(Y_2) = 2.\frac{6}{\theta^2}\int_0^\theta(\chi^2\left(1-\frac{\chi}{\theta}\right))\,d\chi = \frac{12}{\theta^3}\int_0^\theta(\theta\chi^2-\chi^3)\,d\chi$$

$$= \frac{12}{\theta^3}\left(\theta\frac{\chi^3}{3}-\frac{\chi^4}{4}\right)\Big|_0^\theta = \frac{12}{\theta^3}.\theta^4\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) = \theta$$

$\therefore$ *Ο* $2Y_2$ *είναι αμερόληπτος εκτιμητής του* θ.

Για τη διακύμανση του $2Y_2$,

$$E(Y_2^2) = \frac{6}{\theta^2}\int_0^\theta(\chi^3\left(1-\frac{\chi}{\theta}\right))\,d\chi = \frac{6}{\theta^3}\int_0^\theta(\chi^3\theta-\chi^4)\,d\chi = \frac{6}{\theta^3}\left(\theta\frac{\chi^4}{4}-\frac{\chi^5}{5}\right)\Big|_0^\theta$$

$$= \frac{6}{\theta^3}.\theta^5\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right) = \frac{3\theta^2}{10}$$

$$Var(Y_2) = E(Y_2^2)-E^2(Y_2) = \frac{3\theta^2}{10}-\frac{\theta^2}{4} = \frac{\theta^2}{20}$$

Άρα

$$Var(2Y_2) = 2^2Var(Y_2) = 4.\frac{\theta^2}{20} = \frac{1}{5}\theta^2.$$

- $f_{Y_3}(\chi) = \frac{3!}{2!1!}\left\{\frac{\chi}{\theta}\right\}^2\left\{1-\frac{\chi}{\theta}\right\}^0\frac{1}{\theta} = \frac{3}{\theta^3}\chi^2$

$$E\left(\frac{4}{3}Y_3\right) = \frac{4}{3}E(Y_3) = \frac{4}{3}.\frac{3}{\theta^3}\int_0^\theta(\chi.\chi^2)\,d\chi = \frac{4}{\theta^3}\left(\frac{\chi^4}{4}\right)\Big|_0^\theta = \frac{4}{\theta^3}.\frac{\theta^4}{4} = \theta$$

$\therefore$ Ο $\frac{4}{3}Y_3$ *είναι αμερόληπτος εκτιμητής του* θ.

Για τη διακύμανση του $\frac{4}{3}Y_3$,

$$E^2(Y_3) = \frac{3}{\theta^3}\int_0^\theta(\chi^2.\chi^2)\,d\chi = \frac{3}{\theta^3}\left(\frac{\chi^5}{5}\right)\Big|_0^\theta = \frac{3}{5}\theta^2$$

$$Var(Y_3) = E(Y_3^2)-E^2(Y_3) = \frac{3\theta^2}{5}-\frac{9\theta^2}{16} = \frac{3}{80}\theta^2$$

Άρα

$$Var\left(\frac{4}{3}Y_3\right) = \frac{16}{9}.\frac{3}{80}\theta^2 = \frac{1}{15}\theta^2.$$

4. Y_1, Y_2 αμερόληπτοι εκτιμητές του

$\Rightarrow \quad E(Y_1) = E(Y_2) = \theta .$ [1]

$Var(Y_1) = 2Var(Y_2)$ [2]

$k_1, k_2 \in \Re$ *έτσι ώστε* $E(k_1 Y_1 + k_2 Y_2) = \theta$

$k_1 E(Y_1) + k_2 E(Y_2) = \theta \overset{[1]}{\Rightarrow} k_1\theta + k_2\theta = \theta \Rightarrow k_1 + k_2 = 1$ [3]

$Var(k_1 Y_1 + k_2 Y_2) = k_1^2 Var(Y_1) + k_2^2 Var(Y_2) \overset{[2]}{=} (2k_1^2 + k_2^2) Var(Y_2)$

$\overset{[3]}{=} \{2k_1^2 + (1-k_1)^2\} Var(Y_2) = (3k_1^2 - 2k_1 + 1) Var(Y_2)$

$\gamma\iota\alpha \quad \min Var(k_1 Y_1 + k_2 Y_2),$

$\frac{\partial}{\partial k_1} Var(k_1 Y_1 + k_2 Y_2) = 0 \Rightarrow 6k_1 - 2 = 0 \Rightarrow k_1 = \frac{1}{3} \overset{[3]}{\Rightarrow} k_2 = \frac{2}{3}$.

5. Η πληροφορία Fisher για το μ δίνεται από

$$
\begin{aligned}
I_1(\mu) &= E\left\{\frac{\partial}{\partial \mu} \log f(\chi, \mu)\right\}^2 \\
&= E\left\{\frac{\partial}{\partial \psi(\mu)} \log f(\chi, \mu) . \psi'(\mu)\right\}^2 \\
&= \{\psi'(\mu)\}^2 E\left\{\frac{\partial}{\partial \psi(\mu)} \log f(\chi, \mu)\right\}^2 \\
&= \{\psi'(\mu)\}^2 I_0(\psi(\mu)) \qquad (o.\varepsilon.\delta.)
\end{aligned}
$$

6. Έχουμε μίαν παρατήρηση από την κανονική κατανομή

$X \sim N(0, \sigma^2)$

Αμερόληπτος εκτιμητής για το σ είναι της μορφής

$Y = c|X|$

$\Rightarrow \quad E(Y) = c E(|X|) = \sigma$

$\Rightarrow \quad c = \frac{\sigma}{E(|X|)}$ [1]

$$\mathrm{E}(|\mathrm{X}|) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ |\chi| \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\chi^2}{2\sigma^2}} \right\} d\chi$$

$$= \int_{0}^{\infty} \left\{ \chi \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\chi^2}{2\sigma}} \right\} d\chi \quad + \quad \int_{-\infty}^{0} \left\{ (-\chi) \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\chi^2}{2\sigma^2}} \right\} d\chi$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \left(\left\{ (-\sigma^2) e^{-\frac{\chi^2}{2\sigma^2}} \right\} \Big|_0^{\infty} \quad + \quad \left\{ \sigma^2 e^{-\frac{\chi^2}{2\sigma^2}} \right\} \Big|_{-\infty}^{0} \right)$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \sigma^2 \left((-1)(0-1) + (1-0) \right)$$

$$= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} (2) = \sigma \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

$$\overset{[1]}{\Rightarrow} \quad c = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

$\therefore$ Ο $\quad \mathrm{Y} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} |\mathrm{X}|$ $\quad$ *είναι αμερόληπτος εκτιμητής για το σ.*

Η διακύμανση του Y δίνεται από

$$Var(\mathrm{Y}) = \mathrm{E}(\mathrm{Y}^2) - \mathrm{E}^2(\mathrm{Y}) = \mathrm{E}\left(\frac{\pi}{2} |\mathrm{X}|^2 \right) - \sigma^2 = \frac{\pi}{2} \mathrm{E}(\mathrm{X}^2) - \sigma^2$$

$$= \frac{\pi}{2} \{ Var(\mathrm{X}) + \mathrm{E}^2(\mathrm{X}) \} - \sigma^2 = \frac{\pi}{2} (\sigma^2 + 0^2) - \sigma^2 = \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) \sigma^2$$

Για το κάτω φράγμα της Cramer – Rao,

$$f(\chi, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{\chi^2}{2\sigma^2}}$$

$$\log f(\chi, \sigma) = \log\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \right) - \frac{\chi^2}{2\sigma^2} = -\log\sigma - \frac{1}{2}\log(2\pi) - \frac{\chi^2}{2\sigma^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial\sigma} (\log f(\chi, \sigma)) = -\frac{1}{\sigma} + \frac{\chi^2}{\sigma^3}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\sigma^2} (\log f(\chi, \sigma)) = \frac{1}{\sigma^2} - \frac{3\chi^2}{\sigma^4}$$

$$\mathrm{I}(\sigma) = -\mathrm{E}\left(\frac{\partial^2}{\partial\sigma^2} (\log f(\chi, \sigma)) \right) = -\mathrm{E}\left(\frac{1}{\sigma^2} \right) + \frac{3}{\sigma^4} \mathrm{E}(\mathrm{X}^2)$$

$$= -\frac{1}{\sigma^2} + \frac{3}{\sigma^4} (\sigma^2 - 0^2) = \frac{2}{\sigma^2}$$

$$\kappa.\varphi.\, C - R = \frac{1}{n\,\mathrm{I}(\sigma)} = \frac{\sigma^2}{2}$$

$$\therefore \quad Var(\mathrm{Y}) > \kappa.\varphi.\, C - R \qquad \forall\, \sigma > 0 \qquad\qquad (o.\varepsilon.\delta.)$$

7. Έχουμε τυχαίο δείγμα από την κανονική κατανομή

$X_1,\ldots,X_n \quad \sim \quad N\left(0,\sigma^2\right), \qquad \sigma \quad \acute{\alpha}\gamma\nu\omega\sigma\tau\eta$

Βρίσκω πρώτα το κατώ φράγμα της Cramer-Rao για τη διακύμανση κάθε αμερόληπτου εκτιμητή του σ.

$$f(\chi,\sigma) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{\chi^2}{2\sigma^2}}$$

$$\log f(\chi,\sigma) \;=\; -\log\sigma - \frac{1}{2}\log(2\pi) - \frac{1}{2\sigma^2}\chi^2$$

$$\frac{\partial}{\partial\sigma}(\log f(\chi,\sigma)) \;=\; -\frac{1}{\sigma}+\frac{1}{\sigma^3}\chi^2$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial\sigma}(\log f(\chi,\sigma))\right)^2 \;=\; \frac{1}{\sigma^2}-\frac{2}{\sigma^2}\left(\frac{\chi}{\sigma}\right)^2+\frac{1}{\sigma^2}\left(\frac{\chi}{\sigma}\right)^4$$

$$\mathrm{E}\left(\frac{\partial}{\partial\sigma}(\log f(\chi,\sigma))\right)^2 \;=\; \frac{1}{\sigma^2}-\frac{2}{\sigma^2}\mathrm{E}\left(\frac{X}{\sigma}\right)^2+\frac{1}{\sigma^2}\mathrm{E}\left(\frac{X}{\sigma}\right)^4$$

Από σχετικό θεώρημα,

$$X_i \sim \mathrm{N}\left(0,\sigma^2\right) \;\Rightarrow\; \left(\frac{X_i-0}{\sigma}\right)^2 \sim \chi_1^2$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{E}\left(\frac{X}{\sigma}\right)^2 = 1, \qquad \mathrm{E}\left(\frac{X}{\sigma}\right)^4 = Var\left(\frac{X}{\sigma}\right)^2+\mathrm{E}^2\left(\frac{X}{\sigma}\right)^2 = 2+1=3$$

$$\mathrm{I}_1(\sigma) \;=\; \mathrm{E}\left(\frac{\partial}{\partial\sigma}\log f(\chi,\sigma)\right)^2 \;=\; \frac{1}{\sigma^2}+\frac{1}{\sigma^2}.3-\frac{2}{\sigma^2}.1 \;=\; \frac{2}{\sigma^2}$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{I}\left(\sigma^2\right) \;=\; \frac{2n}{\sigma^2}$$

Από σχετικό θεώρημα,

$$Var(\mathrm{T}) \;\geq\; \frac{\{g'(\sigma)\}^2}{n\mathrm{I}_1(\sigma)}$$

$$g(\sigma) \;=\; \log\sigma \;\Rightarrow\; g'(\sigma) \;=\; \frac{1}{\sigma}$$

$$\Rightarrow \quad Var(\mathrm{T}) \;\geq\; \frac{1/\sigma^2}{n.\,2/\sigma^2} \;=\; \frac{1}{2n} \;=\; \kappa.\varphi.C-R$$

8. (α) Για να έχουμε αμερόληπτο εκτιμητή, πρέπει να ισχύει

$$\mathrm{E}\left(e^{-c\mathrm{Y}}\right) \;=\; e^{-\theta} \;\Leftrightarrow\; e^{n\theta\left(e^{-c}-1\right)} \;=\; e^{-\theta} \;\Rightarrow\; c \;=\; \log\left(\frac{n}{n-1}\right)$$

(β) Θα υπολογίσω πρώτα το κάτω φράγμα της Cramer – Rao για τη διακύμανση κάθε αμερόληπτου εκτιμητή του θ.

$$f(\chi,\theta) = \frac{e^{-\theta}\theta^{\chi}}{\chi!}$$

$$\log f(\chi,\theta) = -\theta + \chi\log\theta - \log\chi!$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}(\log f(\chi,\theta)) = -1 + \frac{\chi}{\theta}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial\theta}(\log f(\chi,\theta))\right)^2 = 1 - \frac{2\chi}{\theta} + \frac{\chi}{\theta^2}$$

$$\mathrm{E}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}(\log f(\chi,\theta))\right)^2 = 1 - \frac{2}{\theta}\mathrm{E}(\mathrm{X}) + \frac{1}{\theta^2}\mathrm{E}(\mathrm{X}^2) = 1 - \frac{2}{\theta}.\theta + \frac{1}{\theta^2}(\theta+\theta^2) = \frac{1}{\theta}$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{I}_1(\theta) = \frac{1}{\theta} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{I}(\theta) = \frac{n}{\theta}$$

Από σχετικό θεώρημα,

$$Var(T) \geq \frac{(g'(\theta))^2}{n\mathrm{I}_1(\theta)} = \frac{(-e^{-\theta})^2}{n/\theta} = \frac{\theta e^{-2\theta}}{n} = \kappa.\phi.\, C - R$$

9. Έστω T επαρκής για το θ. Άρα από το θεώρημα παραγοντοποίησης των Neyman – Fisher ,

$$\Leftrightarrow \prod_{i=1}^{n} f(\chi_i,\theta) = g\left(T\left(\underset{\sim}{\chi}\right),\theta\right)h\left(\underset{\sim}{\chi}\right) \qquad [1]$$

και αφού η T' είναι 1-1 και επί, υπάρχει η αντίστροφη συνάρτησή της. Άρα, αν

$$\mathrm{T}' = s(\mathrm{T}) \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{T} = s^{-1}(\mathrm{T}')$$

$$\overset{[1]}{\Leftrightarrow} \prod_{i=1}^{n} f(\chi_i,\theta) = g\left(s^{-1}\left(\mathrm{T}'\left(\underset{\sim}{\chi}\right)\right),\theta\right)h\left(\underset{\sim}{\chi}\right)$$

$$\Rightarrow s^{-1}\left(\mathrm{T}'\left(\underset{\sim}{\chi}\right)\right)$$

επαρκής για το θ.
Όμως η s^{-1} είναι 1-1 και επί.
Άρα η T' είναι επαρκής για το θ.
Έστω τώρα T' επάρκής για το θ.
Όμως $\mathrm{T}' = s(\mathrm{T})$ όπου s 1-1 και επί.
Άρα η $s(\mathrm{T})$ είναι επαρκής για το θ και κατά συνέπεια η T είναι επαρκής για το θ.

10.

$$f(\chi,\theta) = \frac{1}{\mathrm{B}(\alpha,\beta)}\chi^{a-1}(1-\chi)^{\beta-1} \quad , \qquad 0<\chi<1$$

$$\mathrm{B}(\alpha,\beta) = \int_0^1 \chi^{a-1}(1-\chi)^{\beta-1}\,d\chi = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

$$\prod_{i=1}^{n} f(\chi_i,\theta) = \prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\mathrm{B}(\alpha,\beta)}\chi_i^{a-1}(1-\chi_i)^{\beta-1} \quad , \qquad 0<\chi_i<1$$

$$= \left[\frac{1}{\mathrm{B}(\alpha,\beta)}\right]^n \left(\prod_{i=1}^{n}\chi_i\right)^{\alpha-1} \prod_{i=1}^{n}(1-\chi_i)^{\beta-1}$$

$$= \left[\frac{1}{\mathrm{B}(\alpha,\beta)}\right]^n e^{-(\beta-1)\sum_{i=1}^{n}\log\frac{1}{(1-\chi_i)}} \prod_{i=1}^{n}\chi_i^{\alpha-1} = g\left(\sum_{i=1}^{n}\log\frac{1}{1-\chi_I},\beta\right)h\left(\underset{\sim}{\chi}\right)$$

Άρα, από το θεώρημα παραγοντοποίησης Neyman – Fisher, η

$$\sum_{i=1}^{n}\log\frac{1}{1-\mathrm{X}_i}$$

είναι επαρκής για το β. Όμως η

$$\mathrm{T} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log\frac{1}{1-\mathrm{X}_i} \quad \text{είναι} \quad 1-1 \quad \text{και} \quad \text{επί} \quad \text{στο} \quad (0,\infty)$$

άρα είναι επίσης επαρκής για το β.

11.

$$\mathrm{X}_1,\ldots,\mathrm{X}_n \quad \tau.\delta. \quad \sim \quad \mathrm{P}(\theta)$$

$$f(\chi,\theta) = \frac{e^{-\theta}\theta^{\chi}}{\chi!}$$

$$\mathrm{T} = \sum_{i=1}^{n}\mathrm{X}_i \qquad \text{επαρκής και πλήρης στατιστική συνάρτηση}$$

$$\mathrm{T} \sim \mathrm{P}(n\theta) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{E}(\mathrm{T}) = n\theta$$

Ορίζω τη συνάρτηση

$$U := \begin{cases} 1, & \mathrm{X}_1 = 0 \\ 0, & \mathrm{X}_1 \neq 0 \end{cases}$$

$$\mathrm{E}(U) = 1.\mathrm{P}(\mathrm{X}_1=0)+0.\mathrm{P}(\mathrm{X}_1\neq 0) = \mathrm{P}(\mathrm{X}_1=0) = \frac{e^{-\theta}\theta^0}{0!} = e^{-\theta}$$

$\therefore$ *Η* U *είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια της* $e^{-\theta}$.

Από το θεώρημα των Lehman – Scheffe, η μοναδική Α.Ο.Ε.Δ. για την παράμετρο β είναι η

$$\mathrm{T}^* = \mathrm{E}(U/\mathrm{T}) = \mathrm{E}\left(\mathrm{X}_1 / \sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i\right) = \frac{\mathrm{P}\left(\mathrm{X}_1 = 0 / \sum_{i=1}^{n}\mathrm{X}_i = t\right)}{\mathrm{P}\left(\sum_{i=1}^{n}\mathrm{X}_i = t\right)} =$$

$$= \frac{\mathrm{P}(\mathrm{X}_1 = 0)\mathrm{P}\left(\sum_{i=2}^{n}\mathrm{X}_i = t\right)}{\mathrm{P}\left(\sum_{i=1}^{n}\mathrm{X}_i = t\right)} = \frac{e^{-\theta}\, e^{-\theta(n-1)} \theta^t (n-1)^t\, t!}{e^{-n\theta}\, \theta^t\, n^t\, t!} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^t$$

$$\therefore \ \mathrm{H} \ \ \mathrm{T}^* = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{\sum_{i=1}^{n}\mathrm{X}_i} \ \ \text{Α.Ο.Ε.Δ.} \ \ \tau\eta\varsigma \ \ e^{-\theta}.$$

12. (i) Επάρκεια

$$\prod_{i=1}^{n} f(\chi_i, \theta) = \prod_{i=1}^{n} e^{-(\chi_i - \theta)} 1_{[\theta < \chi_i]} = e^{-\left(\sum_{i=1}^{n}\chi_i - n\theta\right)} 1_{[\theta < \min \chi_i]}$$

$$= e^{n\theta}\, 1_{[\theta < \min \chi_i]} . e^{-\sum_{i=1}^{n}\chi_i} = g(\mathrm{T}, \theta) . h\left(\underset{\sim}{\chi}\right)$$

Άρα από το θεώρημα παραγοντοποίησης Neyman – Fisher, η $\mathrm{T} = \min \mathrm{X}_i$ είναι επάρκης στατιστική συνάρτηση για τη θ.

(ii) Πληρότητα

Αναζητώ την κατανομή της T

$$f_{\mathrm{T}}(t) = n[1 - F_{\mathrm{X}}(t)]^{n-1} f_{\mathrm{X}}(t) = n e^{-n(t-\theta)}, \qquad \theta < t$$

$$\mathrm{E}(h(\mathrm{T})) = 0 \ \Rightarrow \ \int_0^\infty h(t) n e^{-n(t-\theta)}\, dt = 0, \ \ \forall\theta$$

$$t - \theta := w \ \Rightarrow \ \int_0^\infty h(w+\theta) e^{-nw}\, dw = 0, \ \ \forall\theta \ \Rightarrow \ h = 0$$

Άρα η T είναι πλήρης στατιστική συνάρτηση.

Δηλαδή η T είναι και πλήρης και επαρκής στατιστική συνάρτηση. Έχουμε

$$\mathrm{E}(\mathrm{T}) = \int_0^\infty t\, n e^{-n(t-\theta)}\, dt = \theta + 1/n$$

$$\Rightarrow \ \mathrm{E}(\mathrm{T} - 1/n) = \theta$$

Άρα η $(\mathrm{T} - 1/\mathrm{n})$ είναι Α.Ο.Ε.Δ. για τη θ ως συνάρτηση πλήρους και επαρκούς στατιστικής συναρτησης.

13.

$$L(\theta) \;=\; \prod_{i=1}^{n} f(\chi_i,\theta) \;=\; \prod_{i=1}^{n} \theta\,\chi_i^{\theta-1} \;=\; \theta^n \prod_{i=1}^{n} \chi_i^{\theta-1}$$

$$l(\theta) \;=\; \log L(\theta) \;=\; n\log\theta + (\theta-1)\log\prod_{i=1}^{n}\chi_i$$

$$S(\theta) \;=\; \frac{\partial l(\theta)}{\partial\theta} \;=\; \frac{n}{\theta} + \log\prod_{i=1}^{n}\chi_i$$

$$S(\theta) = 0 \;\Rightarrow\; \frac{n}{\theta} \;=\; -\log\prod_{i=1}^{n}\chi_i$$

$$\Rightarrow\; \hat{\theta} \;=\; \frac{-n}{\log\prod_{i=1}^{n}\mathrm{X}_i} \;=\; \frac{-n}{\sum_{i=1}^{n}\log\mathrm{X}_i} \;=\; \frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\log(1/\mathrm{X}_i)}$$

$$\frac{\partial^2 l(\theta)}{\partial\theta^2} \;=\; -\frac{n}{\theta^2} < 0 \qquad \forall\theta$$

$$\text{Ε.Μ.Π.} \;:\; \hat{\theta} \;=\; \frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\log(1/\mathrm{X}_i)}$$

14.

$$f(\chi,\theta_1,\theta_2) \;=\; \frac{1}{\theta_2-\theta_1}\,1_{[\theta_1<\chi<\theta_2]}$$

$$L(\theta_1,\theta_2) \;=\; \prod_{i=1}^{n} f(\chi_i,\theta_1,\theta_2) \;=\; \frac{1}{(\theta_2-\theta_1)^n}1_{[\theta_1<\chi_i<\theta_2]} \;=\; \frac{1}{(\theta_2-\theta_1)^n}1_{[\max\chi_i<\theta_2]}1_{[\min\chi_i>\theta_1]}$$

Αναζητούμε θ_1, θ_2 τέτοια ώστε η $L(\theta_1, \theta_2)$ να μεγιστοποιείται.
Αυτό συμβαίνει όταν

$i)\;\; \theta_2 > \max\chi_i$

$ii)\;\; \theta_1 < \min\chi_i$

$iii)\;\; (\theta_2-\theta_1)^n$ *είναι ελάχιστο* $\Leftrightarrow$ $(\theta_2-\theta_1)$ *είναι ελάχιστο.*

$$0 \le \theta_1 < \min\chi_i \quad\Leftrightarrow\quad -\min\chi_i < -\theta_1 \le 0$$

$$\text{και} \qquad \max\chi_i < \theta_2 < \infty$$

$$\Rightarrow\; \min(\theta_2-\theta_1) \;=\; \max\chi_i - \min\chi_i$$

$$\therefore\; (\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2) \;=\; (\min\mathrm{X}_i,\, \max\mathrm{X}_i)$$

15. Έχουμε τη διδιάστατη κανονική κατανομή, με σ.π.π.

$$f(\chi, y) \;=\; \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2\left(1-\rho^2\right)}\left[\left(\frac{\chi-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2-2\rho\left(\frac{\chi-\mu_X}{\sigma_X}\right)\left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)+\left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2\right]\right\}$$

$$L\left(\mu_X,\mu_Y,\sigma_X^2,\sigma_Y^2,\rho\right) \;=$$

$$\left(\frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}}\right)^n\exp\left\{-\frac{1}{2\left(1-\rho^2\right)}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\chi_i-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2-2\rho\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\chi_i-\mu_X}{\sigma_X}\right)\left(\frac{y_i-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{y_i-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2\right]\right\}$$

$$l\left(\mu_X,\mu_Y,\sigma_X^2,\sigma_Y^2,\rho\right) \;=$$

$$c-n\log\sigma_X-n\log\sigma_Y-\frac{n}{2}\log\left(1-\rho^2\right)-\frac{1}{2\left(1-\rho^2\right)}\left\{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\chi_i-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2-2\rho\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\chi_i-\mu_X}{\sigma_X}\right)\left(\frac{y_i-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{y_i-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2\right\}$$

- $$S(\mu_X) \;=\; \frac{\partial l}{\partial\mu_X} \;=\; -\frac{1}{2\left(1-\rho^2\right)}\left(-\frac{2}{\sigma_X}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\chi_i-\mu_X}{\sigma_X}\right)+\frac{\rho}{\left(1-\rho^2\right)}\left(-\frac{1}{\sigma_X}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{y_i-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)$$

$$S(\mu_X)=0 \;\Rightarrow\; \frac{1}{\sigma_X}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\chi_i-\mu_X}{\sigma_X}\right)-\frac{\rho}{\sigma_X}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{y_i-\mu_Y}{\sigma_Y}\right) \;=\; 0$$

$$\Rightarrow\; \frac{1}{\sigma_X}\left(\sum_{i=1}^{n}\chi_i-n\mu_X\right) \;=\; \frac{\rho}{\sigma_Y}\left(\sum_{i=1}^{n}y_i-n\mu_Y\right)$$

$$\Rightarrow\; \hat{\mu}_X \;=\; \frac{1}{n}\left\{-\rho\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}\left(\sum_{i=1}^{n}y_i-n\mu_Y\right)+\sum_{i=1}^{n}\chi_i\right\} \;=\; \overline{\mathrm{X}}$$

- Ομοίως, $\hat{\mu}_Y \;=\; \overline{\mathrm{Y}}$

- $$S(\sigma_X) \;=\; -\frac{n}{\sigma_X}+\frac{1}{2\left(1-\rho^2\right)}\left(\frac{2}{\sigma_X}\right)\sum_{i=1}^{n}(\chi_i-\mu_X)^2+\frac{\rho}{1-\rho^2}\left(-\frac{1}{\sigma_X^2}\right)\sum_{i=1}^{n}(\chi_i-\mu_X)\left(\frac{y_i-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)$$

$$S(\sigma_X)=0 \;\Rightarrow\; \hat{\sigma}_X^2 \;=\; \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\left(1-\rho^2\right)}\left\{\sum_{i=1}^{n}(\chi_i-\mu_X)^2-\rho\sum_{i=1}^{n}(\chi_i-\mu_X)\left(\frac{y_i-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)\right\}$$

$$= \;\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\mathrm{X}_i-\overline{\mathrm{X}}\right)^2$$

- Ομοίως, $\hat{\sigma}_{\mathrm{Y}}^2 \;=\; \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\mathrm{Y}_i-\overline{\mathrm{Y}}\right)^2$

- $$S(\rho) \;=\; \frac{n}{2}\left(\frac{2\rho}{1-\rho^2}\right)-\frac{1}{2\left(1-\rho^2\right)}\{\left(\frac{-2\rho}{1-\rho^2}\right)\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\chi_i-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2-2\rho\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\chi_i-\mu_X}{\sigma_X}\right)\left(\frac{y_i-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{y_i-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2\right]-2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\chi_i-\mu_X}{\sigma_X}\right)\left(\frac{y_i-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)\}$$

$$S(\rho)=0 \;\Rightarrow\; n\rho\left(1-\rho^2\right) \;=\; \rho\{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\chi_i-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2-2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\chi_i-\mu_X}{\sigma_X}\right)\left(\frac{y_i-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{y_i-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2\}-\left(1-\rho^2\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\chi_i-\mu_X}{\sigma_Y}\right)\left(\frac{y_i-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)$$

$$\Rightarrow\ldots\Rightarrow\; \hat{\rho} \;=\; \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\mathrm{X}_i-\overline{\mathrm{X}}\right)\left(\mathrm{Y}_i-\overline{\mathrm{Y}}\right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\mathrm{X}_i-\overline{\mathrm{X}}\right)\left(\mathrm{Y}_i-\overline{\mathrm{Y}}\right)}}$$

16.

$$\mathrm{X}_1,\ldots,\mathrm{X}_n \sim \mathrm{E}\kappa\theta(\beta)$$

$$f(\chi,\theta) \;=\; \beta\, e^{-\beta\chi}$$

- $$L(\beta) \;=\; \beta^n e^{-\beta\sum_{i=1}^{n}\chi_i}$$

$$l(\beta) \;=\; n\log\beta - \beta\sum_{i=1}^{n}\chi_i$$

$$S(\beta) \;=\; \frac{n}{\beta} - \sum_{i=1}^{n}\chi_i$$

$$S(\beta)=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{n}{\beta} \;=\; \sum_{i=1}^{n}\chi_i \quad\Rightarrow\quad \hat{\beta} \;=\; \frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\mathrm{X}_i} \qquad [1]$$

Η εκθετική κατανομή είναι συνεχής, άρα η διάμεσός της m, δίνεται από την

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}\le m)=\frac{1}{2} \quad\Leftrightarrow\quad \int_0^m\left(\beta\, e^{-\beta\chi}\right)d\chi \;=\; \frac{1}{2} \quad\Rightarrow\quad -e^{-\beta\chi}\Big|_0^m \;=\; \frac{1}{2} \quad\Rightarrow\quad e^{-\beta m} \;=\; \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow\quad -\beta m \;=\; \log\frac{1}{2} \quad\Rightarrow\quad m \;=\; \frac{\log 2}{\beta}$$

$$\overset{[1]}{\Rightarrow}\quad \hat{m} \;=\; \log 2 . \frac{\sum_{i=1}^{n}\mathrm{X}_i}{n} \;=\; \log 2 .\, \overline{\mathrm{X}}$$

17.

$$\mathrm{X}_1,\ldots,\mathrm{X}_n \sim Bernoulli(p)$$

$$f(\chi,p) \;=\; p^{\chi}(1-p)^{1-\chi}$$

$$L(p) \;=\; \prod_{i=1}^{n}\left\{p^{\chi_i}(1-p)^{1-\chi_i}\right\} \;=\; p^{\sum_{i=1}^{n}\chi_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n}\chi_i}$$

$$l(p) \;=\; \sum_{i=1}^{n}\chi_i \log p + \left(n-\sum_{i=1}^{n}\chi_i\right)\log(1-p)$$

$$S(p) \;=\; \frac{\sum_{i=1}^{n}\chi_i}{p} - \frac{n-\sum_{i=1}^{n}\chi_i}{1-p}$$

$$S(p)=0 \quad\Rightarrow\quad \sum_{i=1}^{n}\chi_i - p\sum_{i=1}^{n}\chi_i - np + p\sum_{i=1}^{n}\chi_i \;=\; 0 \quad\Rightarrow\quad \hat{p} \;=\; \frac{\sum_{i=1}^{n}\chi_i}{n}$$

$$(i)\quad n=70, \qquad \sum_{i=1}^{n}\mathrm{X}_i = 58, \qquad p\in(0,1) \quad\Rightarrow\quad \hat{p} \;=\; \frac{58}{70}$$

$(ii) \quad p \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$

Η $L(p)$ *είναι αύξουσα συνάρτηση στο* $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$

$$\Rightarrow \quad \hat{p} \quad = \quad \frac{2}{3}$$

18.

$$(\alpha) \quad f(\chi_i, \theta) \quad = \quad p(1-p)^{\chi_i - \theta} 1_{[\chi_i \geq \theta]}$$

$$\Rightarrow \quad L(\chi, p, \theta) \quad = \quad p^n (1-p)^{\sum_{i=1}^{n} \chi_i - n\theta} 1_{[\chi_1 \geq \theta, \chi_2 \geq \theta, \ldots, \chi_n \geq \theta]} \quad = \quad p^n (1-p)^{\sum_{i=1}^{n} \chi_i - n\theta} 1_{[\min \chi_i \geq \theta]}$$

Από το θεώρημα παραγοντοποίησης των Neyman - Fisher, επαρκές στατιστικό για τις παραμέτρους (p, θ) είναι το

$$\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \ , \ \min_{1 \leq i \leq n} X_i \right) \quad .$$

$$(\beta) \quad \hat{\theta} \quad = \quad \min_{1 \leq i \leq n} X_i$$

$$L(p, \hat{\theta}) \quad = \quad p^n (1-p)^{\sum_{i=1}^{n} \chi_i - n\hat{\theta}}$$

$$l(p) \quad = \quad n \log p + \left(\sum_{i=1}^{n} \chi_i \ - n\hat{\theta} \right) \log(1-p)$$

$$S(p) = 0 \qquad \Rightarrow \quad \frac{n}{p} - \frac{\sum_{i=1}^{n} \chi_i \ - n\hat{\theta}}{1-p} \quad = \quad 0$$

$$\Rightarrow \quad n - np - p\sum_{i=1}^{n} \chi_i + np\hat{\theta} \quad = \quad 0$$

$$\Rightarrow \quad \hat{p} \quad = \quad \frac{n}{n + \sum_{i=1}^{n} \chi_i \ - n\hat{\theta}} \quad = \quad \frac{1}{1 + \overline{X} - \hat{\theta}}$$

19.

Βρίσκουμε πρώτα τον Ε.Μ.Π. του σ^2

$$L(\sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\varphi^{-1}(\chi_i)}{\sigma^2 \phi'(\phi^{-1}(\chi_\imath))} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left\{[\phi^{-1}(\chi_i)]^2 - [\phi^{-1}(L)]^2\right\}}$$

$$= \left(\frac{\phi^{-1}(\chi_i)}{\sigma^2 \phi'(\phi^{-1}(\chi_i))}\right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left\{\sum_{i=1}^{n}[\phi^{-1}(\chi_i)]^2 - \sum_{i=1}^{n}[\phi^{-1}(L)]^2\right\}} \quad , \quad \chi_i > L$$

$$l(\sigma^2) = n\log\phi^{-1}(\chi_i) - n\log\sigma^2 - n\log\phi'(\phi^{-1}(\chi_i)) - \frac{1}{2\sigma^2}\left\{\sum_{i=1}^{n}[\phi^{-1}(\chi_i)]^2 - n[\phi^{-1}(L)]^2\right\}$$

$$S(\sigma^2) = -\frac{n}{\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}\left\{\sum_{i=1}^{n}[\phi^{-1}(\chi_i)]^2 - n[\phi^{-1}(L)]^2\right\}$$

$$S(\sigma^2) = 0 \quad \Rightarrow \quad -2n\sigma^2 + \left\{\sum_{i=1}^{n}[\phi^{-1}(\chi_i)]^2 - n[\phi^{-1}(L)]^2\right\} = 0$$

$$\therefore \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{2n}\left\{\sum_{i=1}^{n}[\phi^{-1}(\chi_i)]^2 - n[\phi^{-1}(L)]^2\right\}$$

Για την ασυμπτωτική κατανομή του σ^2, ξέρουμε ότι

$$\sqrt{n}(\hat{\sigma}^2 - \sigma^2) \xrightarrow{D} N\left(0, \frac{1}{\mathrm{I}(\sigma^2)}\right) \qquad [*]$$

Βρίσκουμε την πληροφορία Fisher για το σ^2

$$f(\chi, \sigma^2) = \frac{\phi^{-1}(\chi)}{\sigma^2 \phi'(\phi^{-1}(\chi))} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left\{[\phi^{-1}(\chi)]^2 - [\phi^{-1}(L)]^2\right\}} \quad , \quad \chi > L$$

$$\log f(\chi, \sigma^2) = \log\phi^{-1}(\chi) - \log\phi'(\phi^{-1}(\chi)) - \log\sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2}\left[(\phi^{-1}(\chi))^2 - (\phi^{-1}(L))^2\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial\sigma^2}\log f(\chi, \sigma^2) = -\frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}\mathrm{T}(\chi) \quad , \quad \mathrm{T}(\chi) := (\phi^{-1}(\chi))^2 - (\phi^{-1}(L))^2$$

$$\frac{\partial}{\partial\sigma^{2)^2}}\log f(\chi, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma^4} - \frac{1}{\sigma^6}\mathrm{T}(\chi)$$

$$\mathrm{I}(\sigma^2) = -\mathrm{E}\left(\frac{\partial}{\partial\sigma^{2)^2}}\log f(\chi, \sigma^2)\right) = -\frac{1}{\sigma^4} + \frac{1}{\sigma^6}\mathrm{E}(\mathrm{T}(\chi)) \qquad [**]$$

‘Ομως,

$$f(\chi, \sigma^2) = e^{\log\phi^{-1}(\chi) - \log\phi'(\phi^{-1}(\chi)) - \log\sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2}\mathrm{T}(\chi)}$$

$$\equiv e^{\theta\mathrm{T}(\chi) - b(\theta) + c(\chi)} \quad ; \quad \theta = -\frac{1}{2\sigma^2} \quad \Rightarrow \quad \sigma^2 = -\frac{1}{2\theta}$$

Άρα η $\mathrm{T}(\chi)$ είναι επαρκής και πλήρης στατιστική συνάρτηση και $\mathrm{E}(\mathrm{T}(\chi)) = b'(\theta)$ σύμφωνα με σχετικό θεώρημα.

$$b(\theta) = \log\left(-\frac{1}{2\theta}\right) \quad \Rightarrow \quad b'(\theta) = -\theta.\frac{1}{1/\theta^2} = -\frac{1}{\theta} = 2\sigma^2$$

$$\therefore \quad \mathrm{E}(\mathrm{T}(\chi)) = 2\sigma^2$$

$$\overset{[**]}{\Rightarrow} \quad \mathrm{I}(\sigma^2) = -\frac{1}{\sigma^4} + \frac{1}{\sigma^6}.2\sigma^2 = \frac{1}{\sigma^4} \quad \overset{[*]}{\Rightarrow} \quad \hat{\sigma}^2 \xrightarrow{D} N\left(0, \frac{\sigma^4}{n}\right)$$

20.

$$X_1,\ldots,X_n \sim \text{Εκθ}(\theta) \quad \Rightarrow \quad f(\chi_i,\theta)=\theta\, e^{-\theta\chi_i}$$

$$\theta \sim G(\alpha,\beta)$$

$$E(\theta)=\alpha\beta \quad \Rightarrow \quad \alpha\beta=0.2 \qquad [1]$$

$$Var(\theta)=\alpha\beta^2 \quad \Rightarrow \quad \alpha\beta^2=1 \qquad [2]$$

$$\overset{[1],[2]}{\Rightarrow} \quad \alpha=0.04, \quad \beta=5$$

$$n=20, \quad \overline{X}=3.8 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{20}\chi_i=76$$

$$\pi(\theta) \;=\; \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{1}{\beta}\right)^{\alpha}\theta^{\alpha-1}e^{-\frac{\theta}{\beta}}$$

$$f(\chi_i/\theta) \;=\; \theta\, e^{-\theta\chi_i} \quad \Rightarrow \quad L\left(\underset{\sim}{\chi}/\theta\right) \;=\; \prod_{i=1}^{n} f(\chi_i/\theta) \;=\; \theta^n e^{-\theta\sum_{i=1}^{n}\chi_i}$$

Η εκ των υστέρων κατανομή της θ δίνεται από την

$$\pi\left(\theta/\underset{\sim}{\chi}\right) \;=\; \frac{f\left(\underset{\sim}{\chi}/\theta\right)\pi(\theta)}{f\left(\underset{\sim}{\chi}\right)} \;\propto\; L\left(\underset{\sim}{\chi}/\theta\right)\pi(\theta) \;\propto\; \theta^n e^{-\theta\sum_{i=1}^{n}\chi_i}\theta^{\alpha-1}e^{-\frac{\theta}{\beta}}$$

$$\propto\; \theta^{\,n+\alpha-1}e^{-\theta\sum_{i=1}^{n}\chi_i-\frac{\theta}{\beta}} \;=\; \theta^{(n+0.04)-1}e^{-\theta\left(76+\frac{1}{5}\right)}$$

$$\sim\; G\left(20.04,\frac{1}{76.2}\right)$$

21.

$$X_1,\ldots,X_n \;\sim\; \text{ΑΔ}(r,\,p)$$

$$\pi(p) \;\sim\; Be(\alpha,\,\beta)$$

$$f(\chi_i,\,p) \;=\; \binom{\chi_i-1}{r-1}(1-p)^{\chi_i-r}\,p^r \quad \Rightarrow \quad L(p) \;=\; \prod_{i=1}^{n}\binom{\chi_i-1}{r-1}(1-p)^{\sum_{i=1}^{n}\chi_i-nr}\,p^{nr}$$

$$\pi(p) \;=\; \frac{1}{Be(\alpha,\,\beta)}\,p^{\alpha-1}(1-p)^{\beta-1}$$

$$\pi\left(p/\underset{\sim}{\chi}\right) \;\propto\; p^{\alpha-1}(1-p)^{\beta-1}(1-p)^{\sum_{i=1}^{n}\chi_i-nr}\,p^{nr} \;=\; p^{\alpha+nr-1}(1-p)^{\beta+\sum_{i=1}^{n}\chi_i-nr-1}$$

$$\sim\; Be\left(\alpha+nr,\; \beta+\sum_{i=1}^{n}\chi_i-nr\right)$$

22.

(i)Αν

$$\theta \sim G(\alpha, \beta) \quad ,$$

$$u = \frac{1}{\theta} \sim IG(\alpha, \beta)$$

$$u = \frac{1}{\theta} \quad \Rightarrow \quad du = -\frac{1}{\theta^2} d\theta \quad \Rightarrow \quad d\theta = -\theta^2 du$$

$$\int_0^\infty \pi(\theta) d\theta \quad = \quad \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \left(\frac{1}{\theta}\right)^{\alpha+1} e^{-\frac{\beta}{\theta}} \; d\theta \quad = \quad \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty u^{\alpha+1} e^{-\beta u} \left(-u^{-2}\right) du$$

$$= \quad \int_0^\infty \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} u^{a-1} e^{-\beta u} \; du \quad = \quad \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(\alpha) \left(1/\beta \right)^\alpha} u^{\alpha-1} e^{-u\left(1/\beta \right)} \; du$$

$$= \quad \int_0^\infty f\left(G\left(\alpha, \frac{1}{\beta} \right) \right) du \quad = \quad 1$$

(ii)

$$\sigma^2 \sim \pi\left(\sigma^2\right)$$

$$L\left(\underset{\sim}{\chi} / \sigma^2 \right) \quad = \quad \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (\chi_i - \mu)^2} \quad \overset{\theta έτω \, \theta = \sigma^2}{=} \left(\frac{1}{2\pi} \right)^{n/2} \left(\frac{1}{\theta} \right)^{n/2} e^{-\frac{1}{2\theta} \sum_{i=1}^n (\chi_i - \mu)^2}$$

$$\pi(\theta) \quad = \quad \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \theta^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{\beta}{\theta}} \quad , \quad \theta > 0$$

$$\pi\left(\theta / \underset{\sim}{\chi} \right) \quad \propto \quad \pi(\theta) L\left(\underset{\sim}{\chi} / \theta \right) \quad = \quad \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \theta^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{\beta}{\theta}} \left(\frac{1}{2\pi} \right)^{n/2} \left(\frac{1}{\theta} \right)^{n/2} e^{-\frac{1}{2\theta} \sum_{i=1}^n (\chi_i - \mu)^2}$$

$$\propto \quad \frac{1}{\theta^{\alpha+1+n/2}} e^{-\frac{1}{\theta}\left(\beta + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\chi_i - \mu)^2 \right)}$$

$$\sim \quad IG\left(\alpha + \frac{n}{2}, \quad \frac{1}{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\chi_i - \mu)^2 + \beta} \right)$$