23. $X \sim U\left(\theta-\frac{1}{2}, \theta+\frac{1}{2}\right)$, θ άγνωστο,

$$\Rightarrow \quad f(\chi\,|\,\theta) \;\sim\; 1_{\left[\theta-\frac{1}{2}\le\chi\le\theta+\frac{1}{2}\right]} \;\overset{\chi=12}{=}\; 1_{\left[12-\frac{1}{2}\le\theta\le12+\frac{1}{2}\right]}$$

$$\pi(\theta) \sim U(10, 20) = \frac{1}{10}\cdot 1_{[10\le\theta\le20]}$$

Άρα η εκ των υστέρων κατανομή της θ δίνεται από την

$$\pi(\theta\,|\,\chi) = \frac{1}{10}\cdot 1_{[10\le\theta\le20]}\cdot 1_{[11.5\le\theta\le12.5]} \;\propto\; 1_{[11.5\le\theta\le12.5]} = U(11.5, 12.5)$$

24.

$$X_1,\dots,X_n \sim U(\theta-\alpha, \theta+\beta) \Rightarrow f(\chi,\theta) = \frac{1}{\theta-\alpha-\theta+\beta} = \frac{1}{\alpha+\beta}$$

$$\mu_\kappa(\theta) = \int \chi^\kappa f(\chi,\theta)\,d\chi = \int \frac{\chi^\kappa}{\alpha+\beta}\,d\chi$$

$$m_\kappa = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^\kappa$$

Για $\kappa=1$,

$$\mu_1(\theta) = \int_{\theta-\alpha}^{\theta+\beta}\chi\, f(\chi,\theta)\,d\chi = \int_{\theta-\alpha}^{\theta+\beta}\frac{\chi}{\alpha+\beta}\,d\chi = \frac{\chi^2}{2(\alpha+\beta)}\Big|_{\theta-\alpha}^{\theta+\beta}$$

$$= \frac{\theta^2+2\beta\theta+\beta^2-\theta^2+2\alpha\theta-\alpha^2}{2(\alpha+\beta)} = \frac{(\alpha+\beta)2\theta+(\alpha+\beta)(\beta-\alpha)}{2(\alpha+\beta)}$$

$$= \frac{2\theta+\beta-\alpha}{2} = \alpha+\frac{\beta-\alpha}{2}$$

$$m_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \overline{X}$$

Για να βρω εκτιμήτρια του θ, εξισώνω.

Έχω τότε $\hat\theta+\frac{\beta-\alpha}{2} = \overline{X} \quad\Rightarrow\quad \hat\theta = \overline{X}+\frac{\alpha-\beta}{2}$

$$E(\hat\theta) = E(\overline{X})+\frac{\alpha-\beta}{2} = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)+\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{1}{n}\cdot n\cdot E(X_i)+\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$= \frac{\theta-\alpha+\theta+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2} = \theta$$

$$Var(\hat\theta) = Var\left(\overline{X}+\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = Var(\overline{X}) = Var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}Var(X_i)$$

$$= \frac{1}{n^2}\cdot n\cdot\frac{(\theta+\beta-\theta+\alpha)^2}{12} = \frac{(\alpha+\beta)^2}{12n}$$

25.

$$\mu_1(\alpha,\beta) \;=\; \int_0^1 \chi \cdot \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \cdot \chi^{\alpha-1}(1-\chi)^{\beta-1}\; d\chi$$

$$= \frac{\dfrac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}}{\dfrac{\Gamma(\alpha+\beta+1)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta)}} \cdot \int_0^1 \frac{\Gamma(\alpha+\beta+1)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta)} \cdot \chi^{\alpha+1-1}(1-\chi)^{\beta-1}\; d\chi$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)\Gamma(\alpha)} \;=\; \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$$

$$m_1(\alpha,\beta) \;=\; \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i \;=\; \overline{\mathrm{X}} \;:=\; m_1$$

$$\mu_1(\alpha,\beta) \;=\; m_1(\alpha,\beta) \quad\Rightarrow\quad \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \;=\; m_1 \quad\Rightarrow\quad \hat{\beta} \;=\; \left(\frac{1-m_1}{m_1}\right)\cdot\hat{\alpha}$$

$$\mu_2(\alpha,\beta) \;=\; \int_0^1 \chi^2 \cdot \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \cdot \chi^{\alpha-1}(1-\chi)^{\beta-1}\; d\chi$$

$$= \frac{\dfrac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}}{\dfrac{\Gamma(\alpha+\beta+2)}{\Gamma(\alpha+2)\Gamma(\beta)}} \int_0^1 \frac{\Gamma(\alpha+\beta+2)}{\Gamma(\alpha+2)\Gamma(\beta)} \cdot \chi^{\alpha+1}(1-\chi)^{\beta-1}\; d\chi$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)}$$

$$= \frac{\alpha(\alpha+1)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)}$$

$$m_2(\alpha,\beta) \;=\; \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i^2 \;:=\; m_2$$

$$\mu_2(\alpha,\beta) \;=\; m_2(\alpha,\beta) \quad\Rightarrow\quad \frac{\alpha(\alpha+1)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)} \;=\; m_2$$

$$\therefore\;\; \hat{\alpha} \;=\; \frac{m_1 m_2 - m_1^{\,2}}{m_1^{\,2} - m_2} \quad\Rightarrow\quad \hat{\beta} \;=\; \frac{(m_2 - m_1)(1-m_1)}{m_1^{\,2} - m_2}$$

26. $\mathrm{X}_1,\ldots,\mathrm{X}_n \;\sim\; f(\chi,\theta) \;=\; \dfrac{2}{\theta^2}(\theta-\chi) \;;\; 0<\chi<\theta$

$$\mu_1(\theta) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} \chi\cdot f(\chi,\theta)\; d\chi$$

$$= \frac{2}{\theta^2}\cdot\int_0^{\theta} \chi(\theta-\chi)\; d\chi \;=\; \frac{2}{\theta^2}\cdot\int_0^{\theta} \left(\theta\chi-\chi^2\right) d\chi \;=\; \frac{2}{\theta^2}\left[\theta\frac{\chi^2}{2}-\frac{\chi^3}{3}\right]_0^{\theta} \;=\; \frac{\theta}{3}$$

Για την εκτιμήτρια του θ, $\quad \mu_1(\theta) \;=\; m_1(\theta) \;=\; \overline{\mathrm{X}} \quad\Rightarrow\quad \hat{\theta} \;=\; 3\overline{\mathrm{X}}$

27. Για να έχουμε εκθετική οικογένεια κατανομών πρέπει η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας να μπορεί να γραφεί στη μορφή
$f(\chi,\theta) \;=\; e^{\theta\cdot \mathrm{T}(\chi)-b(\theta)+c(\chi)}$; $\chi\in \mathrm{A}$, όπου το A είναι ανεξάρτητο του θ.

(α) $U(0,\theta)$

$\chi\in[0,\theta]$, άρα δεν έχουμε εκθετική οικογένεια κατανομών.

(β) $N(\theta,\theta^2)$

$$f(\chi,\theta) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}\theta}\cdot e^{-\frac{1}{2\theta^2}(\chi-\theta)^2} \;=\; e^{-\frac{1}{2}\log 2\pi-\log\theta-\frac{1}{2\theta^2}(\chi-\theta)^2} \;,\quad \chi\in(-\infty,+\infty)$$

$$c(\chi) \;=\; -\frac{1}{2}\log 2\pi \;,\qquad b(\theta) \;=\; \log\theta \;,\qquad \mathrm{T}(\chi) \;=\; -\frac{1}{2\theta^2}(\chi-\theta)^2$$

Άρα έχουμε εκθετική οικογένεια κατανομών.

(γ) $f(\chi,\theta) \;=\; \dfrac{2(\chi+\theta)}{1+2\theta}$; $0<\chi<1$; $\theta>0$ $\rightarrow$

δεν μπορεί να γραφεί στην πιο πάνω μορφή, άρα δεν έχουμε εκθετική οικογένεια κατανομών.

(δ) $p(\chi,\theta) \;=\; \exp\{-2\log\theta+\log 2\chi\}$, $0<\chi<\theta$

$\chi\in(0,\theta)$, δηλαδή εξαρτάται από το θ, άρα δεν έχουμε εκθετική οικογένεια κατανομών.

28. $\mathrm{X}\sim N(0,1) \;\Rightarrow\; \mathrm{X}^2 \sim \chi^2_1$

$\mathrm{Y}\sim N(0,1) \;\Rightarrow\; \mathrm{Y}^2 \sim \chi^2_1$

X,Y ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές $\Rightarrow$ $\mathrm{X}^2,\mathrm{Y}^2$ επίσης ανεξάρτητες.

$\therefore\;\; \mathrm{X}^2+\mathrm{Y}^2 \sim \chi^2_2$

Ορίζω το ενδεχόμενο A; $\mathrm{A}:=\{\mathrm{X}^2+\mathrm{Y}^2\le r^2\}$

$\Rightarrow\;\; \mathrm{P}(\mathrm{A})=0.99 \;\Rightarrow\; \mathrm{P}\left(\chi^2_2\le r^2\right)=0.99 \;\Rightarrow\; \mathrm{P}\left(\chi^2_2> r^2\right)=0.01$

$\Rightarrow\;\; r^2=9.210 \;\Rightarrow\; r=3.03$

Άρα αρκεί $r\ge 3.03$ για να ανήκει το σημείο (X,Y) στον κύκλο με πιθανότητα 0.99

29. Έστω $\mathrm{X}\sim F(\chi)$, F συνεχής,
και $\mathrm{Y}=-2\log F(\chi)$ (μετασχηματισμός ολοκληρώματος πιθανότητας).

$$Z := F(\chi) \quad \Rightarrow \quad F_Z(z) = P(Z \le z) = P(F(\chi) \le z) \overset{\eta\, F\ \acute{\epsilon}\chi\epsilon\iota\ \alpha\nu\tau\acute{\iota}\sigma\tau\rho o\varphi\eta}{=} P\left(X \le F^{-1}(z)\right)$$

$$= F\left(F^{-1}(z)\right) = z \ ; \quad 0 \le z \le 1$$

$$f_Z(z) = F_Z{}'(z) = 1 \ ; \quad 0 \le z \le 1$$

$$Y = -2\log z \quad \Rightarrow \quad Z = e^{-\frac{y}{2}} \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{dy} = -\frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}} \ , \quad y > 0 \ , \quad \Rightarrow \quad Y \sim Exp\left(\frac{1}{2}\right)$$

Όμως $Exp\left(\frac{1}{2}\right) = \mathcal{X}_2^2$

Άρα τελικά, από σχετικό θεώρημα, $\sum_{i=1}^{n} Y_i = -2\sum_{i=1}^{n}\log F_{X_i}(\chi_i) \sim \mathcal{X}_{2n}^2$

30. $X_1,\ldots,X_5 \sim N(0,1)$

$$X_1 + X_2 \sim N(0,2) \quad \Rightarrow \quad \frac{X_1 + X_2}{\sqrt{2}} \sim N(0,1)$$

$$X_i^2 \sim \mathcal{X}_1^2 \ ; \quad i = 1,\ldots,5 \quad \Rightarrow \quad X_3^2 + X_4^2 + X_5^2 \sim \mathcal{X}_3^2$$

$$\frac{X_1 + X_2}{\sqrt{2}\sqrt{\frac{X_3^2 + X_4^2 + X_5^2}{3}}} \sim t_3 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{X_1 + X_2}{\left(X_3^2 + X_4^2 + X_5^2\right)^{1/2}} \sim t_3$$

$$\therefore \quad c = \frac{3}{2}$$

31.

$$X_1, X_2 \sim N\left(0, \sigma^2\right)$$

$$\Rightarrow \quad X_1 + X_2 \sim N\left(0, 2\sigma^2\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{X_1 + X_2}{\sqrt{2}\sigma} \sim N(0,1)$$

και $X_1 - X_2 \sim N\left(0, 2\sigma^2\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}\sigma} \sim N(0,1)$,

άρα $\frac{(X_1 + X_2)^2}{2\sigma^2} \sim \mathcal{X}_1^2$ και $\frac{(X_1 - X_2)^2}{2\sigma^2} \sim \mathcal{X}_1^2$.

Όμως

$$Cov(\mathrm{X}_1+\mathrm{X}_2,\mathrm{X}_1-\mathrm{X}_2) \;=\; Cov(\mathrm{X}_1,\mathrm{X}_1)-Cov(\mathrm{X}_1,\mathrm{X}_2)+Cov(\mathrm{X}_2,\mathrm{X}_1)-Cov(\mathrm{X}_2,\mathrm{X}_2)$$

$$= \; Var(\mathrm{X}_1)-Var(\mathrm{X}_2) \;=\; 2\sigma^2-2\sigma^2 \;=\; 0$$

$$\overset{\text{επειδή έχουμε κανονική κατανομή}}{\Rightarrow} \quad (\mathrm{X}_1+\mathrm{X}_2)\perp(\mathrm{X}_1-\mathrm{X}_2)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{(\mathrm{X}_1+\mathrm{X}_2)^2}{(\mathrm{X}_1-\mathrm{X}_2)^2} \;\sim\; F_{1,1} \;=\; t_1^2$$

$$\mathrm{P}(t_1^2<4) \;=\; \mathrm{P}(-2<t<2) \;=\; \mathrm{P}(t_1<2)-\mathrm{P}(t_1<-2)$$

$$= \; \mathrm{P}(t_1<2)-[1-\mathrm{P}(t_1<2)] \;=\; 2\mathrm{P}(t_1<2)-1 \;=\; 0.70$$

32. $\mathrm{X} \;\sim\; F_{m,n}$

$\mathrm{X} \;=\; \dfrac{\mathrm{Y}/m}{\mathrm{Z}/n}$, όπου $\mathrm{Y} \;\sim\; \chi_m^2$ και $\mathrm{Z} \;\sim\; \chi_n^2$

$$\mathrm{E}(\mathrm{X}) \;=\; \frac{n}{m}\cdot\mathrm{E}(\mathrm{Y})\cdot\mathrm{E}\left(\frac{1}{\mathrm{Z}}\right)$$

$$\mathrm{E}(\mathrm{Y}) \;=\; m$$

$$\mathrm{E}\left(\frac{1}{\mathrm{Z}}\right) \;=\; \int_0^\infty \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{\Gamma(n/2)\cdot 2^{n/2}}\cdot z^{n/2}\cdot e^{-z/2}\;dz$$

$$= \; \frac{\Gamma(n/2-1)\cdot 2^{n/2-1}}{\Gamma(n/2)\cdot 2^{n/2}} \;=\; \frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma(n/2-1)}{\Gamma(n/2)} \;=\; \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(n/2-1)} \;=\; \frac{1}{n-2}$$

$$\therefore \quad \mathrm{E}(\mathrm{X}) \;=\; \frac{n}{m}\cdot m\cdot\frac{1}{n-2} \;=\; \frac{n}{n-2}$$ (ο.ε.δ.)

33. Έστω M η διάμεσος της κατανομής $F_{n,n}$ και έστω $\mathrm{Z}\sim F_{n,n}$.

$\mathrm{X}\sim\chi_n^2$, $\mathrm{Y}\sim\chi_n^2$, $\mathrm{X}\perp\mathrm{Y}$

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}\le\mathrm{Y}) \;:=\; \mathrm{P}(\mathrm{A}) \;=\; \mathrm{E}(1_\mathrm{A}) \;=\; \mathrm{E}(\mathrm{E}(1_\mathrm{A}\mid\mathrm{Y})) \qquad [1]$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}\mid\mathrm{Y}=y) \;=\; \mathrm{P}(\mathrm{X}\le\mathrm{Y}\mid\mathrm{Y}=y) \;=\; \mathrm{P}(\mathrm{X}\le\mathrm{Y}) \;=\; F(y)$$

$$\mathrm{E}(F(y)) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} F(z)\,dF(z) \;=\; \frac{F^2(z)}{2}\Big|_{-\infty}^{\infty} \;=\; \frac{1}{2} \quad \overset{[1]}{\Rightarrow} \quad \mathrm{P}\left(\frac{\mathrm{X}}{\mathrm{Y}}\le 1\right) \;=\; \frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad \mathrm{M}=1$$

(αφού ισχύει $\mathrm{P}(\mathrm{X}\le\mathrm{Y}) \;=\; \mathrm{P}(\mathrm{X}>\mathrm{Y}) \;=\; \dfrac{1}{2}$).

34.

(α) $$\mathrm{P}\left(\min_i \mathrm{X}_i < m < \max_i \mathrm{X}_i\right) = \mathrm{P}\left(m < \max_i \mathrm{X}_i\right) - \mathrm{P}\left(m < \min_i \mathrm{X}_i\right)$$
$$= 1 - \mathrm{P}\left(\max_i \mathrm{X}_i < m\right) - 1 + \mathrm{P}\left(\min_i \mathrm{X}_i < m\right)$$
$$= \mathrm{P}\left(\max_i \mathrm{X}_i < m\right) - \mathrm{P}\left(\min_i \mathrm{X}_i < m\right)$$
$$= 1 - \mathrm{P}\left(\mathrm{X}_i < m \quad \forall i, i = 1, \ldots, n\right) - \mathrm{P}\left(\mathrm{X}_i \geq m \quad \forall i\right)$$
$$= 1 - \{F(m)\}^n - \{1 - F(m)\}^n$$
$$= 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(1 - \frac{1}{2}\right)^n$$
$$= 1 - 2 \cdot \frac{1}{2^n} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad (o.\varepsilon.\delta)$$

(β) $\mathrm{P}(q_1 < m < q_2) = 1 - \alpha$ αν το (q_1, q_2) είναι ένα $(1-\alpha)\%$ διάστημα εμπιστοσύνης για το m.

Έτσι, αφού $\mathrm{P}\left(\min_{1 \leq i \leq 6} \mathrm{X}_i < m < \max_{1 \leq i \leq 6} \mathrm{X}_i\right) \overset{(\alpha)}{=} 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 0.96875$

ένα 97% διάστημα εμποστοσύνης για τη διάμεσο των 6 μετρήσεων είναι το $(1.44,\ 3.54)$.

(γ) Ο βαθμός εμπιστοσύνης του διαστήματος εμπιστοσύνης $\left(\mathrm{X}_{(2)}, \mathrm{X}_{(n-1)}\right)$ για τη διάμεσο m είναι η πιθανότητα $\mathrm{P}\left(\mathrm{X}_{(2)} \leq m \leq \mathrm{X}_{(n-1)}\right)$.

$$\mathrm{P}\left(\mathrm{X}_{(2)} < m < \mathrm{X}_{(n-1)}\right) = \mathrm{P}\left(\mathrm{X}_{(2)} < m\right) - \mathrm{P}\left(\mathrm{X}_{(n-1)} < m\right) \qquad [*]$$

Αλλά η α.σ.κ. του $\mathrm{X}_{(\kappa)}$ είναι η

$$F_{\mathrm{X}_{(\kappa)}}(\chi) = \mathrm{P}\left(\mathrm{X}_{(\kappa)} \leq \chi\right) = \sum_{j=\kappa}^{n} \binom{n}{j} F^j(\chi)\left(1 - F(\chi)\right)^{n-j}$$

$$\overset{[*]}{\Rightarrow} \quad \mathrm{P}\left(\mathrm{X}_{(2)} \leq m \leq \mathrm{X}_{(n-1)}\right) = \sum_{j=2}^{n} \binom{n}{j} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^j \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-j} - \sum_{j=n-1}^{n} \binom{n}{j} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^j \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-j}$$
$$= \sum_{j=2}^{n} \binom{n}{j} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \left[\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} - (1 + n + n + 1)\right]$$
$$= \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \left(2^n - 2(n+1)\right) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot (n+1)$$

35.

$n=22,$

$$\overline{X}=\frac{\sum_{i=1}^{22}X_i}{22}=\frac{69.5+75.8+\ldots+75.7+79.6}{22}=77.33$$

$$S^2=\frac{1}{n-1}\cdot\sum_{i=1}^{22}\left(X_i-\overline{X}\right)^2=\frac{1}{21}\cdot\left\{(69.5-77.33)^2+\ldots+(79.6-77.33)^2\right\}=25.36$$

$\Rightarrow \quad S=5.06$

Αφού το δείγμα προέρχεται από την κανονική κατανομή, ένα $(1-\alpha)\%$ Δ.Ε. για την τυπική απόκλιση σ είναι το $\left(\sqrt{\frac{(n-1)}{\chi^2_{\alpha/2,\,n-1}}}\cdot S,\quad \sqrt{\frac{(n-1)}{\chi^2_{1-\alpha/2,\,n-1}}}\cdot S\right)$

$\alpha=1-0.99=0.01 \quad\Rightarrow\quad \alpha/2=0.05,\quad 1-\alpha/2=0.995$

$\chi^2_{0.01,21}=41.401$, $\chi^2_{0.995,21}=8.034$

Άρα, ένα 99% Δ.Ε. για την σ είναι το

$$\left(\sqrt{\frac{21}{41.404}}\times 5.04,\quad \sqrt{\frac{21}{8.034}}\times 5.04\right) \;=\; (3.59,\quad 8.15).$$

36. $\overline{X}\sim N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{n}\right)$

$X_{n+1}\sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$

$$\overline{X}-X_{n+1}\sim N\left(0,\frac{\sigma^2}{n}+\sigma^2\right)=N\left(0,\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\sigma^2\right)$$

$$\frac{\overline{X}-X_{n+1}}{\sigma\sqrt{1/n+1}}\;\sim\;N(0,1) \quad \text{και} \quad \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\;\sim\;\chi^2_{n-1}$$

$\overline{X}\perp S^2$ (από σχετικό θεώρημα)

$\overline{X}\perp X_{n+1}$ και $X_{n+1}\perp S^2$. αφού ο $\overline{X}$ και το S^2 προέρχονται από τις πρώτες n παρατηρήσεις.

Άρα τελικά $$\frac{\dfrac{\overline{X}-X_{n+1}}{\sigma\sqrt{1/n+1}}}{\sqrt{\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\Big/(n-1)}}=\frac{\overline{X}-X_{n+1}}{S\sqrt{1/n+1}}\;\sim\;t_{n-1}.$$

Συνεπώς, ένα $(1-\alpha)\%$ διάστημα πρόβλεψης για την X_{n+1} είναι το

$\overline{X}\pm t_{\alpha/2,\,n-1}\cdot S\sqrt{1/n+1}$.

37. Έστω X_i τα ποσοστά αύξησης της σοδειάς με το λίπασμα #1 και Y_i τα ποσοστά αύξησης της σοδειάς με το λίπασμα #2,

$$X_i \sim N(\mu_X, \sigma_X^2), \qquad Y_i \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2),$$

$$\overline{X} \sim N\left(\mu_X, \frac{\sigma_X^2}{n}\right), \qquad \overline{Y} \sim N\left(\mu_Y, \frac{\sigma_Y^2}{n}\right), \qquad \overline{X} \perp \overline{Y}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\overline{X} - \overline{Y} - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}{n}}} \sim N(0,1)$$

$$\frac{(n-1)S_X^2}{\sigma_X^2} \sim \mathcal{X}^2_{n-1}, \qquad \frac{(n-1)}{\sigma_Y^2} \sim \mathcal{X}^2_{n-1}, \qquad S_X^2 \perp S_Y^2$$

$$\Rightarrow \quad (n-1)\left\{\frac{S_X^2}{\sigma_X^2} + \frac{S_Y^2}{\sigma_Y^2}\right\} \sim \mathcal{X}^2_{2n-2}.$$

Υποθέτω ότι $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\dfrac{\sqrt{n}\{\overline{X} - \overline{Y} - (\mu_X - \mu_Y)\}}{\sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_X^2}}}{\sqrt{(n-1)\dfrac{S_X^2 + S_Y^2}{\sigma_X^2} \Big/ 2n-2}} \sim t_{2n-2}$

$$\Rightarrow \quad \frac{\sqrt{n}\left(\overline{X} - \overline{Y} - (\mu_X - \mu_Y)\right)}{\sqrt{S_X^2 + S_Y^2}} \sim t_{2n-2}$$

Ένα $(1-\alpha)\%$ διάστημα εμπιστοσύνης για τη διαφορά των δύο μέσων είναι το

$$\overline{X} - \overline{Y} \pm t_{2n-2} \cdot \sqrt{\frac{S_X^2 + S_Y^2}{n}}$$

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{5} X_i}{5} = \frac{28.5 + \ldots + 29.6}{5} = 26.58, \qquad S_X^2 = \frac{1}{4} \cdot \sum_{i=1}^{5} \left(X_i - \overline{X}\right)^2 = \frac{1}{4}(23.668) = 5.917$$

$$\overline{Y} = \frac{\sum_{i=1}^{5} Y_i}{5} = \frac{38.7 + \ldots + 43.8}{5} = 40.36, \qquad S_Y^2 = \frac{1}{4} \cdot \sum_{i=1}^{5} \left(Y_i - \overline{Y}\right)^2 = \frac{1}{4}(38.092) = 9.523$$

$$\overline{X} - \overline{Y} = -13.78, \qquad \sqrt{\frac{S_X^2 + S_Y^2}{5}} = 1.76, \qquad t_{8,0.025} = 2.306$$

Άρα ένα 95% Δ.Ε. για τη διαφορά των δύο μέσων ποσοστών αύξησης είναι το $-13.78 \pm (2.306)(1.76) \; = \; (-17.84, -9.73)$.

38. $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \ldots, (X_9, Y_9) \;\sim\; N\left(\mu_X, \mu_Y, \sigma_X^2, \sigma_Y^2, \rho\right)$

$$d_i = X_i - Y_i, \qquad E(d_i) = E(X_i) - E(Y_i) = \mu_X - \mu_Y, \qquad Var(d_i) = \sigma_d^2$$

$$d \sim N\left(\mu_X - \mu_Y,\ \sigma_d^2\right) \;\Rightarrow\; \sqrt{n} \cdot \frac{\left(\overline{d} - (\mu_X - \mu_Y)\right)}{\sigma_d} \sim N(0,1)$$

Ισχύει επίσης, σύμφωνα με σχετικό θεώρημα, $\frac{(n-1)S_d^2}{\sigma_d^2} \sim X_{n-1}^2$ και $\bar{d} \perp S_d^2$.

`Ετσι έχουμε $\dfrac{\dfrac{\sqrt{n}\left(\bar{d}-(\mu_X-\mu_Y)\right)}{\sigma_d}}{\sqrt{\dfrac{(n-1)S_d^2}{\sigma_d^2}\Big/ n-1}} \sim t_{n-1} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\sqrt{n}\left(\bar{d}-(\mu_X-\mu_Y)\right)}{S_d} \sim t_{n-1}$.

Άρα ένα $(1-\alpha)\%$ Δ.Ε. για την μέση διαφορά των τιμών είναι το $\bar{d} \pm t_{n-1,\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S_d}{n}$

$$\bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^{9} d_i}{9} = \frac{\sum_{i=1}^{9}(X_i - Y_i)}{9} = \frac{\sum_{i=1}^{9} X_i}{9} - \frac{\sum_{i=1}^{9} Y_i}{9} = \bar{X} - \bar{Y}$$

$$\Rightarrow \bar{d} = 4476.78 - 4388.44 = 88.34$$

$$S_d^2 = \frac{1}{8}\cdot \sum_{i=1}^{9}\left(d_i - \bar{d}\right)^2 = 9832.75 \Rightarrow S_d = 99.16 \quad , \quad t_{8,0.025} = 2.306$$

$\therefore$ Δ.Ε.: $88.34 \pm \frac{1}{3}\cdot(2.306)(99.16) = (12.11, 164.56)$.

39. (α) $\theta \sim N(\mu, v^2)$

$$\pi\left(\theta \mid \underset{\sim}{\chi}\right) \propto L\left(\underset{\sim}{\chi} \mid \theta, \sigma^2\right)\cdot \pi(\theta) = \left\{\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\chi_i-\theta)^2}\right\}\cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}v}\cdot e^{-\frac{1}{2v^2}(\theta-\mu)^2}$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n+1/2}\cdot \frac{1}{v\sigma^n}\cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(\chi_i-\theta)^2}\cdot e^{-\frac{1}{2v^2}(\theta-\mu)^2} \propto e^{-\frac{1}{2}\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n}(\chi_i-\theta)^2}{\sigma^2}+\frac{(\theta-\mu)^2}{v^2}\right\}}$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(\chi_i-\theta)^2}{\sigma^2} + \frac{(\theta-\mu)^2}{v^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\chi_i^2 - 2\theta\sum_{i=1}^{n}\chi_i + n\theta^2}{\sigma^2} + \frac{\theta^2 - 2\theta\mu + \mu^2}{v^2}$$

$$= \theta^2\left(\frac{n}{\sigma^2}+\frac{1}{v^2}\right) - 2\theta\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\chi_i}{\sigma^2}+\frac{\mu}{v^2}\right) + \frac{\sum_{i=1}^{n}\chi_i^2}{\sigma^2} + \frac{\mu^2}{v^2}$$

$$\Rightarrow \pi\left(\theta \mid \underset{\sim}{\chi}\right) \propto e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{n}{\sigma^2}+\frac{1}{v^2}\right)\left\{\theta^2 - 2\theta\cdot\frac{\left(\frac{n\bar{X}}{\sigma^2}+\frac{\mu}{v^2}\right)}{\left(\frac{n}{\sigma^2}+\frac{1}{v^2}\right)}+\ldots\right\}}$$

$$\therefore \quad \pi\left(\theta \mid \underset{\sim}{\chi}\right) \quad \sim \quad N\left(\frac{\left(\frac{n\overline{X}}{\sigma^2}+\frac{\mu}{v^2}\right)}{\left(\frac{n}{\sigma^2}+\frac{1}{v^2}\right)}, \frac{1}{\left(\frac{n}{\sigma^2}+\frac{1}{v^2}\right)}\right) \quad := \quad N\left(\mu_1, v_1^2\right)$$

Άρα το ζητούμενο διάστημα εμπιστοσύνης είναι το $\mu_1 \pm z_{\alpha/2} \cdot v_1$.

(β) $$\mu_1 \quad = \quad \frac{\frac{n\overline{X}}{\sigma^2}+\frac{\mu}{v^2}}{\frac{n}{\sigma^2}+\frac{1}{v^2}} \quad \overset{v^2\to\infty}{\to} \quad \frac{\frac{n\overline{X}}{\sigma^2}}{\frac{n}{\sigma^2}} \quad = \quad \overline{X}$$

$$v_1^2 \quad = \quad \frac{1}{\frac{n}{\sigma^2}+\frac{1}{v^2}} \quad \overset{v^2\to\infty}{\to} \quad \frac{\sigma^2}{n}$$

Βλέπουμε ότι για $v^2 \to \infty$, το διάστημα εμπιστοσύνης στο (α) είναι το διάστημα για το μ όταν έχουμε τυχαίο δείγμα από κανονικό πληθυσμό, δηλαδή το $\overline{X} \pm z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

`Αρα για $v^2 \to \infty$ δεν έχουμε καμία πληροφορία από την εκ των προτέρων κατανομή.

40. (α) $X_1,\ldots,X_m \sim N\left(\mu_X, \sigma_X^2\right)$, $\quad Y_1,\ldots,Y_n \sim N\left(\mu_Y, \sigma_Y^2\right)$

$$\left.\begin{array}{l} \overline{X} \sim N\left(\mu_X, \frac{\sigma_X^2}{m}\right) \\ \overline{Y} \sim N\left(\mu_Y, \frac{\sigma_Y^2}{n}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\overline{X}-\overline{Y}\right) \sim N\left(\mu_X-\mu_Y, \frac{\sigma_X^2}{m}+\frac{\sigma_Y^2}{n}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\overline{X}-\overline{Y}-\left(\mu_X-\mu_Y\right)}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{m}+\frac{\sigma_Y^2}{n}}} \sim N(0,1) \quad \overset{\sigma_X^2=d\sigma_Y^2}{\Rightarrow} \quad \frac{\overline{X}-\overline{Y}-\left(\mu_X-\mu_Y\right)}{\sqrt{\frac{d\sigma_Y^2}{m}+\frac{\sigma_Y^2}{n}}} \sim N(0,1) \quad \text{(ο.ε.δ.).}$$

(β) $X_1,\ldots,X_m \sim N\left(\mu_X, \sigma_X^2\right) \Rightarrow \frac{(m-1)S_X^2}{\sigma_X^2} \sim \chi^2_{m-1}$

$Y_1,\ldots,Y_n \sim N\left(\mu_Y, \sigma_Y^2\right) \Rightarrow \frac{(m-1)S_Y^2}{\sigma_Y^2} \sim \chi^2_{n-1}$

$$\overset{\sigma_X^2=d\sigma_Y^2}{\Rightarrow} \quad \frac{(m-1)S_X^2}{d\sigma_Y^2}+\frac{(n-1)S_Y^2}{\sigma_Y^2} \sim \chi^2_{n+m-2} \quad .$$

(γ) Από σχετικό θεώρημα, ξέρουμε ότι αν $\mathrm{X}_1,\ldots,\mathrm{X}_m \sim N\left(\mu_{\mathrm{X}}, \sigma_{\mathrm{X}}^2\right)$,

$\overline{\mathrm{X}} = \frac{1}{m}\cdot\sum_{i=1}^{m}\mathrm{X}_i$, $\quad S_{\mathrm{X}}^2 = \frac{1}{m-1}\cdot\sum_{i=1}^{m}\left(\mathrm{X}_i - \overline{\mathrm{X}}\right)^2$ τότε $\overline{\mathrm{X}} \perp S_{\mathrm{X}}^2$.

Άρα εδώ έχουμε $\overline{\mathrm{X}} \perp S_{\mathrm{X}}^2$, $\overline{\mathrm{Y}} \perp S_{\mathrm{Y}}^2$.

Επίσης $\overline{\mathrm{X}} \perp \overline{\mathrm{Y}}$ και $S_{\mathrm{X}}^2 \perp S_{\mathrm{Y}}^2$.

$\Rightarrow$ $g\left(\overline{\mathrm{X}}, \overline{\mathrm{Y}}\right) \perp h\left(S_{\mathrm{X}}^2, S_{\mathrm{Y}}^2\right)$ γιατί έχουμε κανονικές κατανομές.

(δ) $$\mathrm{A} = \frac{\overline{\mathrm{X}} - \overline{\mathrm{Y}} - (\mu_{\mathrm{X}} - \mu_{\mathrm{Y}})}{\sqrt{\dfrac{d\sigma_{\mathrm{Y}}^2}{m} + \dfrac{\sigma_{\mathrm{Y}}^2}{n}}} \sim N(0,1)$$

$$\mathrm{B} = \frac{(m-1)S_{\mathrm{X}}^2}{d\sigma_{\mathrm{Y}}^2} + \frac{(n-1)S_{\mathrm{Y}}^2}{\sigma_{\mathrm{Y}}^2} \sim X_{n-m-2}^2,$$

και $\mathrm{A} \perp \mathrm{B}$. $\Rightarrow$ $$\frac{\mathrm{A}}{\sqrt{\mathrm{B}/n+m-2}} \sim t_{n+m-2}$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{\mathrm{X}} - \overline{\mathrm{Y}} - (\mu_{\mathrm{X}} - \mu_{\mathrm{Y}})}{\sqrt{\dfrac{d}{m} + \dfrac{1}{n}}\sqrt{\dfrac{(m-1)S_{\mathrm{X}}^2}{d} + (n-1)S_{\mathrm{Y}}^2 \Big/ (n+m-2)}} \sim t_{n+m-2}$$

Άρα ένα $(1-\alpha)\%$ Δ. Ε. για το $(\mu_{\mathrm{X}} - \mu_{\mathrm{Y}})$ είναι το

$$\overline{\mathrm{X}} - \overline{\mathrm{Y}} \pm t_{n+m-2,\alpha/2}\sqrt{\left(\frac{d}{m} + \frac{1}{n}\right)}\sqrt{\frac{\dfrac{(m-1)S_{\mathrm{X}}^2}{d} + (n-1)S_{\mathrm{Y}}^2}{n+m-2}}.$$