41. (α) Ορίζω την τυχαία μεταβλητή $\mathrm{Y} := 2\theta \mathrm{X} \Rightarrow \mathrm{X} = \frac{\mathrm{Y}}{2\theta} \Rightarrow \frac{d\mathrm{X}}{d\mathrm{Y}} = \frac{1}{2\theta}$

$$f_{\mathrm{X}}(\chi) = \theta e^{-\theta \chi},$$

$$f_{\mathrm{Y}}(y) = f_{\mathrm{X}}(y)\left|\frac{d\chi}{dy}\right| = \theta e^{-\theta y/2\theta} \cdot \frac{1}{2\theta} = \frac{1}{2} \cdot e^{-y/2} .$$

$$W = 2\theta \cdot \sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Y}_i \sim \mathcal{X}^2_{2n} .$$

(β) $\mathrm{P}(q_1 \le W \le q_2) = 1-\alpha \Rightarrow \mathrm{P}\left(q_1 \le 2\theta \sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i \le q_2 \right) = 1-\alpha$.

Για τη $\mathcal{X}^2$ παίρνουμε διάστημα ίσων ουρών

$$\Rightarrow \mathcal{X}^2_{2n-1,\frac{\alpha}{2}} \le 2\theta \sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i \le \mathcal{X}^2_{2n,\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow \frac{1}{2\sum_{i=1}^{n}\mathrm{X}_i} \cdot \mathcal{X}^2_{2n,1-\frac{\alpha}{2}} \le \theta \le \frac{1}{2\sum_{i=1}^{n}\mathrm{X}_i} \cdot \mathcal{X}^2_{2n,\frac{\alpha}{2}} .$$

(γ) $\alpha = 0.10 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.05$

$\mathcal{X}^2_{14,0.95} = 6.571$, $\mathcal{X}^2_{14,0.05} = 23.68$.

$$n = 7, \quad \overline{\mathrm{X}} = 93.6 = \frac{\sum_{i=1}^{7}\mathrm{X}_i}{7} \Rightarrow \sum_{i=1}^{7}\mathrm{X}_i = 655.2$$

Άρα ένα 90% Δ.Ε. για το θ είναι το

$$\left(6.571\left(\frac{1}{2(655.2)}\right), \ 23.68\left(\frac{1}{2(655.2)}\right)\right) = (0.05, 0.018).$$

42. (α) $\overline{\mathrm{X}} = \frac{15+\ldots+10}{8} = \frac{126}{8} = 15.75$, $S^2_{\mathrm{X}} = \frac{1}{7} \cdot \sum_{i=1}^{8}\left(\mathrm{X}_i - \overline{\mathrm{X}}\right)^2 = \frac{1}{7}(323.5) = 46.21$

$\overline{\mathrm{Y}} = \frac{25+\ldots+32}{10} = \frac{233}{10} = 23.3$, $S^2_{\mathrm{Y}} = \frac{1}{9} \cdot \sum_{j=1}^{10}\left(\mathrm{Y}_j - \overline{\mathrm{Y}}\right)^2 = \frac{1}{9} \cdot (834.1) = 92.68$

Άρα μια εκτίμηση για την ποσότητα $\frac{\sigma^2_{\mathrm{X}}}{\sigma^2_{\mathrm{Y}}}$ είναι η

$$\frac{\hat{\sigma}^2_{\mathrm{X}}}{\hat{\sigma}^2_{\mathrm{Y}}} = \frac{S^2_{\mathrm{X}}}{S^2_{\mathrm{Y}}} = \frac{46.21}{92.68} = 0.499$$

(β) $\frac{(n-1)S^2_{\mathrm{X}}}{\sigma^2_{\mathrm{X}}} \sim \mathcal{X}^2_{n-1} \quad \perp \quad \frac{(m-1)S^2_{\mathrm{Y}}}{\sigma^2_{\mathrm{Y}}} \sim \mathcal{X}^2_{m-1}$

$$\Rightarrow \frac{\frac{(n-1)S^2_{\mathrm{X}}}{\sigma^2_{\mathrm{X}}} \Big/ (n-1)}{\frac{(m-1)S^2_{\mathrm{Y}}}{\sigma^2_{\mathrm{Y}}} \Big/ (m-1)} \sim F_{n-1,m-1} \Rightarrow \frac{\sigma^2_{\mathrm{X}}}{\sigma^2_{\mathrm{Y}}} \cdot \frac{S^2_{\mathrm{Y}}}{S^2_{\mathrm{X}}} \sim F_{m-1,n-1}$$

$$\Rightarrow \quad F_{m-1,n-1,1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S_{\mathrm{X}}^2}{S_{\mathrm{Y}}^2} \quad \le \quad \frac{\sigma_{\mathrm{X}}^2}{\sigma_{\mathrm{Y}}^2} \quad \le \quad F_{m-1,n-1,\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S_{\mathrm{X}}^2}{S_{\mathrm{Y}}^2}$$

Αντικαθιστώντας στην πιο πάνω σχέση τα δεδομένα της άσκησης,

και αφού $F_{9,7,0.025} = 4.82$ και $F_{9,7,0.975} = 0.2381$,

ένα 95% Δ.Ε. για το λόγο $\dfrac{\sigma_{\mathrm{X}}^2}{\sigma_{\mathrm{Y}}^2}$ είναι το $(0.119, 2.405)$.

43. $\mathrm{X} =$ # των ατόμων που υποστηρίζουν τη θανατική ποινή

$\mathrm{X} \sim Bin(1234, p)$, $\quad \hat{p} = \dfrac{\mathrm{X}}{n} = \dfrac{864}{1234} = 0.70$

$\mathrm{X}_i \sim Bernoulli(p)$

$$f(\chi, p) \;=\; p^{\chi}(1-p)^{1-\chi} \qquad \Rightarrow \qquad \log f(\chi, p) \;=\; \chi \log p + (n-\chi)\log(1-p)$$

$$\frac{\partial}{\partial p}\log f(\chi, p) \;=\; \frac{\chi}{p} - \frac{1-\chi}{1-p}\,, \qquad \frac{\partial^2}{\partial p^2}\log f(\chi, p) \;=\; -\frac{\chi}{p^2} - \frac{1-\chi}{(1-p)^2}$$

$$\mathrm{I}(p) \;=\; -\mathrm{E}\left(\frac{\partial^2}{\partial p^2}\log f(\chi, p)\right) \;=\; \frac{1}{p^2}\mathrm{E}(\mathrm{X}) + \frac{1}{(1-p)^2}(1-\mathrm{E}(\mathrm{X}))$$

$$= \frac{p}{p^2} + \frac{1-p}{(1-p)^2} \;=\; \frac{1}{p} + \frac{1}{1-p} \;=\; \frac{1-p+p}{p(1-p)} \;=\; \frac{1}{p(1-p)}$$

$$\sigma^2(p) \;=\; 1\!\!\diagup\! n\mathrm{I}(p) \;=\; \frac{p(1-p)}{n} \qquad \Rightarrow \qquad \sigma(p) \;=\; \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

$$\frac{\hat{p}-p}{\sigma(p)} \;\overset{D}{\Rightarrow}\; N(0,1)$$

Άρα ένα $(1-\alpha)$% διάστημα εμπιστοσύνης για το p είναι το $\hat{p} \pm z_{\alpha/2} \cdot \sigma(\hat{p})$

$z_{0.05/2} = 1.96$, $\quad \hat{p} = 0.70$, επομένως το ζητούμενο Δ.Ε. είναι το $(0.674, 0.726)$.

44. $\mathrm{X} \sim N(\mu, 4.84)$

$$z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sqrt{4.84}}{\sqrt{n}} \;=\; 0.4 \quad \overset{\alpha=0.05}{\Rightarrow} \quad (1.96)\cdot\frac{\sqrt{4.84}}{\sqrt{n}} \;=\; 0.4$$

$$\Rightarrow \quad \frac{(1.96)^2(4.84)}{(0.4)^2} \;=\; n \quad \Rightarrow \quad n \;=\; 116.21$$

45. (α) $X_1,...,X_n \sim U(0,\theta)$

$$f(\chi_i,\theta) = \frac{1}{\theta}, \quad 0 \le \chi_i \le \theta$$

$$\Rightarrow F_{X_i}(\chi_i) = P(X_i \le \chi_i) = \begin{cases} 0 & , \ \chi_i \le 0 \\ \chi_i/\theta, & 0 < \chi_i < \theta \\ 1 & , \ \chi_i \ge \theta \end{cases}$$

$$Y_{(n)} = \max(X_1,...,X_n)$$

$$\Rightarrow F_{Y_{(n)}}(y) = \{F_X(y)\}^n = \begin{cases} 0 & , \ y \le 0 \\ (y/\theta)^n, & 0 < y < \theta \\ 1 & , \ y \ge \theta \end{cases}$$

Η συνάρτηση ισχύος είναι η

$$\pi(\theta) = P(Y_{(n)} \le 1.5 \,|\, \theta) = \begin{cases} \left(\frac{1.5}{\theta}\right)^n, & 1.5 < \theta \\ 1 & , \ 1.5 \ge \theta \end{cases}.$$

(β) Το μέγεθος του ελέγχου δίνεται από την

$$\alpha = \sup_{\theta \in \Omega_0} \pi(\theta) = \sup_{\theta \ge 2} \left(\frac{1.5}{\theta}\right)^n = \left(\frac{1.5}{2}\right)^n = \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

46. (α) Y : ο αριθμός ελαττωματικών προϊόντων στο δείγμα. $Y \sim Bin(n, p)$

Η συνάρτηση ισχύος δίνεται από την

$$\pi(p) = P(Y \in C \,|\, H_0) = P(Y \ge 7 \ \acute{\eta} \ Y \le 1 \,|\, p) = P(Y \ge 7 \,|\, p) + P(Y \le 1 \,|\, p).$$

$$P(Y \le 1 \,|\, p) = \sum_{\kappa=0}^{1} \binom{20}{\kappa} \cdot p^{\kappa} \cdot (1-p)^{20-\kappa} = \binom{20}{1} \cdot p \cdot (1-p)^{19} + \binom{20}{0} \cdot (1-p)^{20}$$

$$P(Y \ge 7 \,|\, p) = 1 - P(Y \le 6) = 1 - \sum_{\kappa=0}^{6} \binom{20}{\kappa} \cdot p^{\kappa} \cdot (1-p)^{20-\kappa}$$

Επομένως έχουμε

$\pi(0) = 1$, $\pi(0.1) = 0.394$,

$\pi(0.2) = 0.1559$, $\pi(0.3) = 0.3996$,

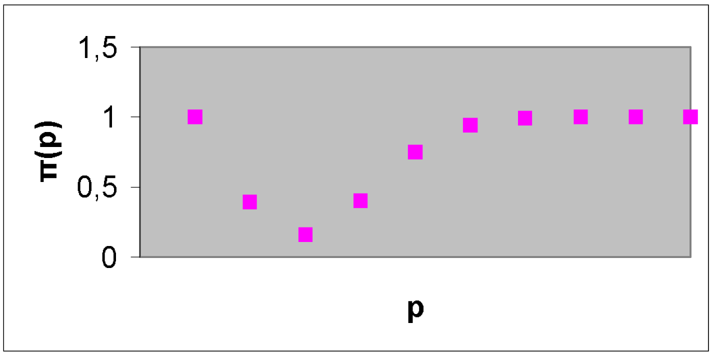
$\pi(0.4) = 0.7505$, $\pi(0.5) = 0.9424$,

$\pi(0.6) = 0.9935$, $\pi(0.7) = 0.99974$,

$\pi(0.8) = 0.99998$, $\pi(0.9) = 0.99999$,

$\pi(1) = 1$

Έτσι η γραφική παράσταση της συνάρτησης ισχύος είναι η ακόλουθη:



(β) $\alpha = \sup_{p\in\Omega_0}\{\pi(p)\} = \sup_{p=2/10}\{P(Y \geq 7 \mid p) + P(Y \leq 1 \mid p)\} = \pi(2/10) = 0.154$.

47. (α) Σύμφωνα με το Λήμμα των Neyman - Pearson,

$$\frac{L_0}{L_1} \leq k \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2\chi} \leq k\,, \quad \chi \in [0,1] \quad \Rightarrow \quad \chi \geq k^*\,, \quad \chi \in [0,1]$$

α = P(απορρίπτω την $H_0 \mid H_0$ αληθής) = $P(X \geq k^* \mid f(\chi) = f_0(\chi))$

$$\overset{\alpha=0.10}{\Rightarrow} \quad 0.10 = \int_{k^*}^{1} 1\, d\chi = 1 - k^* \quad \Rightarrow \quad k^* = \frac{9}{10}.$$

Άρα απορρίπτω την H_0 αν $\chi \geq \frac{9}{10}$ (ισχυρότατος έλεγχος).

(β) Σφάλμα τύπου ΙΙ = P(μη απόρριψης της $H_0 \mid H_1$ αληθής)

$$= P\left(X < \frac{9}{10} \mid f(\chi) = f_1(\chi)\right) = \int_0^{9/10} 2\chi\, d\chi = \left(\frac{9}{10}\right)^2 = 0.81.$$

48. (α) Από το Λήμμα Neyman – Pearson,

$$\frac{L_0}{L_1} \leq k \quad \Rightarrow \quad \frac{\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2\cdot 2}(\chi_i-\mu)^2}}{\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2\cdot 3}(\chi_i-\mu)^2}} \leq k$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{3}{2}\right)^{n/2} \cdot e^{-\frac{1}{12}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2} \leq k \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 \geq k^*$$

$$\alpha = P\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 \geq k^* \mid \sigma^2 = 2\right) \quad \Rightarrow \quad \alpha = P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{2} \geq \frac{k^*}{2}\right)$$

$$X_i \sim N(\mu, 2) \quad \Rightarrow \quad \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{2} \sim \mathcal{X}_n^2$$

$$\therefore \quad k^* \leq 2\mathcal{X}_{n,\alpha}^2$$

(ομοιομόρφως ισχυρότατος έλεγχος γιατί δεν εξαρτάται από την H_0).

(β) $n = 8, \quad \alpha = 0.05 \quad \Rightarrow \quad k^* = 2\mathcal{X}_{8,\,0.05}^2 = 31.02$

Άρα απορρίπτουμε την H_0 αν $\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 \geq 31.02$.

49. $X_1,\ldots,X_n \sim G(\alpha, \beta)$.

Έστω $\beta_2 > \beta_1$.

$$\frac{L\left(\underset{\sim}{\chi} \mid \beta_2\right)}{L\left(\underset{\sim}{\chi} \mid \beta_1\right)} = \frac{\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\beta_2^{\alpha}\cdot\Gamma(\alpha)}\cdot\chi_i^{\alpha-1}\cdot e^{-\chi_i/\beta_2}\right)}{\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\beta_1^{\alpha}\cdot\Gamma(\alpha)}\cdot\chi_i^{\alpha-1}\cdot e^{-\chi_i/\beta_1}\right)} = \left(\frac{1/\beta_2^{\alpha}}{1/\beta_1^{\alpha}}\right)\cdot e^{\left(-\frac{1}{\beta_2}+\frac{1}{\beta_1}\right)\sum_{i=1}^{n}X_i}$$

$$= \left(\frac{\beta_1}{\beta_2}\right)^{\alpha n}\cdot e^{\left(\frac{1}{\beta_1}-\frac{1}{\beta_2}\right)n\cdot\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{n}} = \left(\frac{\beta_1}{\beta_2}\right)^{\alpha n}\cdot e^{n\left(\frac{1}{\beta_2}-\frac{1}{\beta_1}\right)\left(-\overline{X}_n\right)}$$

$$\beta_2 > \beta_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\beta_2} < \frac{1}{\beta_1} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\beta_2} - \frac{1}{\beta_1} < 0 \quad \Rightarrow \quad (-n)\left(\frac{1}{\beta_2}-\frac{1}{\beta_1}\right) > 0$$

$$\Rightarrow \quad e^{\left(\frac{1}{\beta_2}-\frac{1}{\beta_1}\right)(-n)} > e^0 > 1$$

Άρα η $\dfrac{L\left(\underset{\sim}{\chi} \mid \beta_2\right)}{L\left(\underset{\sim}{\chi} \mid \beta_1\right)}$ είναι μονότονη συνάρτηση του $-\overline{X}_n$.

Επομένως, σύμφωνα με σχετικό θεώρημα, η από κοινού κατανομή των $X_1,\ldots,X_n$ έχει μονότονο λόγο πιθανοφάνειας ως προς την $-\overline{X}_n$.

50. (α) $H_0: \quad \mu \geq 10 \ (\Leftrightarrow \mu = 10)$ προς $H_1: \quad \mu < 10 \ (\Leftrightarrow \mu = \mu_1 < 10)$

Από το Λήμμα Neyman – Pearson ,

$$\frac{L\left(\underset{\sim}{\chi} \mid H_0 \text{ αληθής}\right)}{L\left(\underset{\sim}{\chi} \mid H_1 \text{ αληθής}\right)} = \frac{\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\chi_i - 10)^2}}{\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\chi_i - \mu_1)^2}} \overset{n=4,\,\sigma^2=1}{=} e^{-\frac{1}{2}\left\{\sum_{i=1}^{4}(X_i-10)^2 - \sum_{i=1}^{4}(X_i-\mu_1)^2\right\}}$$

$$= e^{-\frac{1}{2}\left\{\sum_{i=1}^{4} X_i^2 - 2(10)\sum_{i-1}^{4} X_i + 100n - \sum_{i=1}^{4} X_i^2 + 2\mu_1 \sum_{i=1}^{4} X_i - 4\mu_1^2\right\}}$$

$$= e^{-\frac{1}{2}\left\{(20-2\mu_1)\sum_{i=1}^{4} X_i + 4(\mu_1^2 - 100)\right\}} = e^{2(\mu_1^2-100)} \cdot e^{(10-\mu_1)\sum_{i=1}^{4} X_i}$$

$\mu_1 < 10 \quad \Rightarrow \quad 10 - \mu_1 > 0 \quad \Rightarrow \quad e^{(10-\mu_1)4} > e^0 = 1$.

Άρα η οικογένεια κατανομών $f(\chi, \mu)$ έχει την ιδιότητα του μονότονου πηλίκου πιθανοφάνειας και από σχετικό θεώρημα, η περιοχή $\frac{\sum_{i=1}^{4} X_i}{4} \leq C$ δίνει ομοιομόρφως ισχυρότατο έλεγχο.

$0.1 = \alpha = P(\overline{X} \leq C \mid \mu \geq 10) \quad \Rightarrow \quad 0.9 = P(\overline{X} \geq C \mid \mu \geq 10)$

$\Rightarrow \quad 1 - P\left(\frac{\overline{X} - 10}{1/2} \geq C\right) = 0.9 \quad \Rightarrow \quad P\left(\frac{10 - \overline{X}}{1/2} \leq C\right) = 0.9$

$\Rightarrow \quad \Phi\left(\frac{10 - C}{1/2}\right) = 0.9 \quad \Rightarrow \quad -2C + 20 = 1.285$

$\Rightarrow \quad C = 9.358$

Άρα η περιοχή $\overline{X} \leq 9.358$ δίνει ομοιομόρφως ισχυρότατο έλεγχο.

(β) Η ισχύς του ελέγχου δίνεται από την

$\gamma = P(\underset{\sim}{X} \in C \mid H_1 \text{ αληθής}) = P(\overline{X} \leq 9.358 \mid \mu = 9) = P\left(\frac{\overline{X} - \mu}{1/2} \leq 9.358\right)$

$= \Phi\left(\frac{9.3589 - 9}{1/2}\right) = \Phi(0.716) = \frac{0.7611 + 0.7642}{2} = 0.7626$

(γ) $H_0: \quad \mu \geq 10$

$P(\text{αποδοχής της } H_0) = P(\overline{X} \geq 9.358 \mid \mu = 11) = 1 - \Phi\left(\frac{9.358 - 11}{1/2}\right)$

$= \Phi\left(\frac{11 - 9.358}{1/2}\right) = \Phi(3.284) = 1 - P(Z > 3.284)$

$= 1 - 0.005 = 0.995$

51. $H_0: \ \theta \le 1$ προς $H_1: \ \theta > 1$

Έστω $\theta_1 < \theta_2$.

$$\frac{L\left(\underset{\sim}{\chi} \mid \theta_2\right)}{L\left(\underset{\sim}{\chi} \mid \theta_1\right)} = \frac{\prod_{i=1}^{n} f(\chi_i, \theta_2)}{\prod_{i=1}^{n} f(\chi_i, \theta_1)} = \left(\frac{\theta_2}{\theta_1}\right)^n \cdot \frac{\left(\prod_{i=1}^{n} \chi_i\right)^{\theta_2} \cdot \chi_i^n}{\left(\prod_{i=1}^{n} \chi_i\right)^{\theta_1} \cdot \chi_i^n} = \left(\frac{\theta_2}{\theta_1}\right)^n \cdot \left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)^{\theta_2-\theta_1}$$

$$= \left(\frac{\theta_2}{\theta_1}\right)^n \cdot e^{\log\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)^{\theta_2-\theta_1}} = \left(\frac{\theta_2}{\theta_1}\right)^n \cdot e^{(\theta_2-\theta_1)\sum_{i=1}^{n}\log X_i}$$

$\theta_2 < \theta_1 \ \Rightarrow \ \theta_2 - \theta_1 > 0$, άρα η $\dfrac{L\left(\underset{\sim}{\chi} \mid \theta_2\right)}{L\left(\underset{\sim}{\chi} \mid \theta_1\right)}$ είναι αύξουσα συνάρτηση του $\sum_{i=}^{n} \log X_i$ και κατά συνέπεια, σύμφωνα με σχετικό θεώρημα, η περιοχή $\sum_{i=}^{n} \log X_i \ge C$ επιπέδου σημαντικότητας α δίνει ομοιομόρφως ισχυρότατο έλεγχο.

$$\alpha = P\left(\sum_{i=1}^{n} \log X_i \ge C \mid H_0 \text{ αληθής}\right) = P\left(\sum_{\iota=1}^{n} \log X_i \ge C \mid \theta = 1\right) .$$

Χρειάζομαι την κατανομή του $\sum_{i=1}^{n} \log X_i$.

$f(\chi, \theta) = \theta \chi^{\theta-1}$

Ορίζω $2Y = \log X \ \Leftrightarrow \ -2Y = -\log X$

$$F_{2Y}(y) = P(2Y \le y) = P\left(\log X \le \frac{y}{2}\right) = P\left(X \le e^{\frac{y}{2}}\right)$$

$$= \int_0^{e^{\frac{y}{2}}} \theta \chi^{\theta-1} \, d\chi = e^{\frac{\theta y}{2}}$$

$$f_{2Y}(y) = \frac{\theta}{2} \cdot e^{\frac{\theta y}{2}} \quad \Rightarrow \quad f_{-2Y}(y) = \frac{\theta}{2} \cdot e^{-\frac{\theta y}{2}}$$

$$\overset{\theta=1}{\Rightarrow} \quad -2Y \sim \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{y}{2}} = \text{E}\kappa\theta\left(\frac{1}{2}\right)$$

Όμως $\text{E}\kappa\theta\left(\frac{1}{2}\right) = \mathcal{X}_2^2 \quad \Rightarrow \quad -2\sum_{i=1}^{n} \log X_i \sim \mathcal{X}_{2n}^2$.

Άρα $\alpha = P\left(\sum_{i=1}^{n} \log X_i \ge C \mid H_0 \text{ αληθής}\right) = P\left(\mathcal{X}_{2n}^2 \le -2C \mid \theta = 1\right)$

$$\overset{n=8,\, \alpha=0.05}{\Rightarrow} \quad P\left(\mathcal{X}_{16}^2 \le -2C\right) = 0.05 \quad \Rightarrow \quad C = \frac{7.962}{-2} = -3.981$$

Συνεπώς ο ομοιομόρφως ισχυρότατος έλεγχος απορρίπτει την H_0 όταν $\sum_{i=1}^{8} \log X_i \ \ge \ -3.981$ (ο.ε.δ.).

52. Με το Λήμμα των Neyman – Pearson, αν θεωρήσω την εναλλακτική υπόθεση ως απλή, και παρατηρήσω ότι η κρίσιμη περιοχή δεν εξαρτάται από αυτήν, τότε έχω ομοιομόρφως ισχυρότατο έλεγχο.

Εδώ,

$\mathrm{H}_0: \ \theta = 0$ προς $\mathrm{H}_1: \ \theta > 0$ και θεωρώ (N-P) $\theta = \theta_1 > 0$.

$$\frac{L_0}{L_1} \leq k \quad \Rightarrow \quad \frac{1+(\chi-\theta)^2}{1+\chi^2} \leq k$$

$$\Rightarrow \quad 1+\chi^2 - 2\theta_1\chi + \theta_1^2 \leq k + k\chi^2 \quad \Rightarrow \quad \chi^2(1-k) - 2\theta_1\chi + \theta_1^2 + 1 \leq k$$

Άρα η κρίσιμη περιοχή εξαρτάται από το θ_1 δηλαδή από την εναλλακτική υπόθεση και κατά συνέπεια δεν υπάρχει Ο.Ι.Ε. των πιο πάνω υποθέσεων.

53. (α) Από το Λήμμα Neyman - Pearson,

$$\frac{L_0}{L_1} \leq k \quad \Rightarrow \quad \frac{\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{8\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{128}(\chi_i - 80)^2}}{\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{8\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{128}(\chi_i - 76)^2}} = e^{-\frac{1}{128}\left[\sum_{i=1}^{n}(\chi_i-80)^2 - \sum_{i=1}^{n}(\chi_i-76)^2\right]} \leq k$$

$$-\frac{1}{128}\left\{\sum_{i=1}^{n}(\chi_i - 80)^2 - \sum_{i=1}^{n}(\chi_i - 76)^2\right\} = -\frac{1}{128}\left\{-2(80)\sum_{i=1}^{n}\chi_i + 80^2 + 2(76)\sum_{i=1}^{n}\chi_i - 76^2\right\}$$

$$= -\frac{1}{128}\left\{-8\sum_{i=1}^{n}\chi_i + 624\right\} = \frac{1}{16}\sum_{i=1}^{n}\chi_i - \frac{39}{8}$$

Άρα έχουμε

$$e^{\frac{1}{16}\sum_{i=1}^{n}\chi_i - \frac{39}{8}} \leq k \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{16}\cdot\sum_{i=1}^{n}\chi_i \leq \log k + \frac{39}{8}$$

$$\Rightarrow \quad \overline{\mathrm{X}} = \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\chi_i \leq \frac{16}{n}\left(\log k + \frac{39}{8}\right) := c$$

$\therefore \quad C = \left\{\underset{\sim}{\chi} : \ \overline{\mathrm{X}} \leq c\right\}$ ορίζει ισχυρότατο έλεγχο,

(β) $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n \sim N(\mu, 64) \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\overline{\mathrm{X}} - \mu}{8/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

$0.05 = \alpha = \mathrm{P}($απορρίπτω την $\mathrm{H}_0 \mid \mathrm{H}_0$ αληθής$)$

$$= \mathrm{P}(\overline{\mathrm{X}} \leq c \mid \mu = 80) = \Phi\left(\frac{c - 80}{8/\sqrt{n}}\right)$$

$\Rightarrow \quad \dfrac{-c + 80}{8/\sqrt{n}} = 1.65$ (από τους πίνακες) $[*]$

$0.05 = \beta \quad \Rightarrow \quad 1 - 0.05 = \mathrm{P}\left(\underset{\sim}{\chi} \in C \mid \mathrm{H}_1 \text{ αληθής}\right)$

$$\Rightarrow \quad 0.95 = \mathrm{P}\left(\overline{\mathrm{X}} \le c \mid \mu = 76\right) = \Phi\left(\frac{c-76}{8/\sqrt{n}}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{c-76}{8/\sqrt{n}} = 1.65 \quad \text{(από τους πίνακες)} \qquad [**]$$

$$[*]+[**] \quad \Rightarrow \quad -c+80+c-76 = 2(1.65)\cdot\frac{8}{\sqrt{n}} \quad \Rightarrow \quad n \approx 43$$

$$\overset{[*]}{\Rightarrow} \quad c = 80 - \frac{8}{\sqrt{43}}(1.65) \quad \Rightarrow \quad c \approx 78$$

54. (α) Από σχετικό θεώρημα,

αν $\mu_1 < \mu_2$ και $\dfrac{L\left(\underset{\sim}{\chi} \mid \mu_2\right)}{L\left(\underset{\sim}{\chi} \mid \mu_1\right)}$ αύξουσα συνάρτηση του T, τότε η περιοχή $\mathrm{T} \ge c$, επιπέδου σημαντικότητας α, δίνει ομοιομόρφως ισχυρότατο έλεγχο. Έστω $\mu_1 < \mu_2$.

$$\frac{L\left(\underset{\sim}{\chi} \mid \mu_2\right)}{L\left(\underset{\sim}{\chi} \mid \mu_1\right)} = \frac{\prod_{i=1}^{10} \dfrac{e^{-\mu_2}\cdot \mu_2^{\chi_i}}{\chi_i!}}{\prod_{i=1}^{10} \dfrac{e^{-\mu_1}\cdot \mu_1^{\chi_i}}{\chi_i!}} = \prod_{i=1}^{10}\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{\chi_i}\cdot e^{10(\mu_1-\mu_2)} = \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{\sum_{i=1}^{10}\mathrm{X}_i}\cdot e^{10(\mu_1-\mu_2)}$$

Όμως $\mu_2 > \mu_1 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\mu_2}{\mu_1} > 1.$

Άρα $\dfrac{L\left(\underset{\sim}{\chi} \mid \mu_2\right)}{L\left(\underset{\sim}{\chi} \mid \mu_1\right)}$ αύξουσα συνάρτηση του $\sum_{i=1}^{10}\mathrm{X}_i$.

Συνεπώς ο ομοιομόρφως ισχυρότατος έλεγχος για $\mathrm{H}_0 : \mu = \frac{1}{2}$ προς $\mathrm{H}_1 : \mu > \frac{1}{2}$ δίνεται από τη σ.σ. $\sum_{i=1}^{10}\mathrm{X}_i$. ($\sum_{i=1}^{10}\mathrm{X}_i \ge c$).

(β) $\alpha = \mathrm{P}(\text{απορρίπτω την } \mathrm{H}_0 \mid \mathrm{H}_0 \text{ αληθής}) = \mathrm{P}\left(\sum_{i=1}^{10}\mathrm{X}_i \ge c \mid \mu = \frac{1}{2}\right)$

$$\mathrm{X}_i \sim \mathrm{P}(\mu) \;\Rightarrow\; \sum_{i=1}^{10}\mathrm{X}_i \sim \mathrm{P}(10\mu) \overset{\mu=\frac{1}{2}}{=} \mathrm{P}(5).$$

Για $\alpha = 0.068$, $\quad \mathrm{P}\left(\sum_{i=1}^{10}\mathrm{X}_i \ge c \mid \mu = \frac{1}{2}\right) = 0.068$

Μετά από υπολογισμούς, βρίσκουμε $c = 9$.

Άρα η κρίσιμη περιοχή είναι της μορφής $\sum_{i=1}^{10}\mathrm{X}_i \ge 9$.

(γ) Η συνάρτηση ισχύος δινεται από την

$$\pi(\mu) = \mathrm{P}\left(\underset{\sim}{\chi} \in C \mid \mu\right) = \mathrm{P}\left(\sum_{i=1}^{10} \mathrm{X}_i \geq 9\right) = 1 - \sum_{k=0}^{8} \frac{(10\mu)^k \cdot e^{-10\mu}}{k} .$$

55. $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n \sim N(\mu, 5)$.

$\mathrm{H}_0 \; : \; \mu = 162$ προς $\mathrm{H}_1 \; : \; \mu \neq 162$.

Εκτιμήτρια Μέγιστης Πιθανοφάνειας όταν ισχύει η $\mathrm{H}_0 \; : \; \hat{\hat{\mu}} = \mu_0$

Εκτιμήτρια Μέγιστης Πιθανοφάνειας γενικά : $\hat{\mu} = \overline{\mathrm{X}}$.

$$\lambda = \frac{\sup\limits_{\mu=\mu_0} L\left(\mu \mid \underset{\sim}{\chi}\right)}{\sup\limits_{\mu=\overline{\mathrm{X}}} L\left(\mu \mid \underset{\sim}{\chi}\right)} = \cdots = e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left\{n\left(\overline{\mathrm{X}}-\mu_0\right)^2\right\}} = e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\overline{\mathrm{X}}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right)^2} = e^{-\frac{1}{2}z^2} .$$

Απορρίπτω την H_0 όταν $\lambda \leq c \;\Leftrightarrow\; e^{-\frac{1}{2}z^2} \leq c \;\Leftrightarrow\; z^2 \geq c^*$

δηλαδή όταν $|z| = \left|\frac{\overline{\mathrm{X}}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right| = \left|\frac{161.1-162}{\sqrt{5}/\sqrt{20}}\right| = 1.8 \geq z_{\alpha/2}$.

(α) Σε επίπεδο 10%, $z_{\alpha/2} = z_{0.05} = 1.645 < 1.8 \Rightarrow$ απορρίπτω την H_0.

(β) Σε επίπεδο 5%, $z_{\alpha/2} = z_{0.025} = 1.96 > 1.8 \Rightarrow$ δεν απορριπτω την H_0.

(γ) p-value $= \mathrm{P}([z[\geq 1.8) = \mathrm{P}(z \leq -1.8) + \mathrm{P}(z \geq 1.8) = 2(1-\mathrm{P}(z \leq 1.8))$

$= 2(1-0.9641) = 0.0718$.

56, Όταν ισχύει η H_0 , $\hat{\hat{\mu}} = \mu_0$, $\hat{\hat{\sigma}}^2 = \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(\mathrm{X}_i-\mu_0\right)^2$.

Γενικά για όλο τον παραμετρικό χώρο, $\hat{\mu} = \overline{\mathrm{X}}$, $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(\mathrm{X}_i-\overline{\mathrm{X}}\right)^2$.

$$\lambda = \frac{L\left(\underset{\sim}{\chi}\mid\mu_0\right)}{L\left(\underset{\sim}{\chi}\mid\mu\right)} = \cdots = \left(\frac{1}{1+\dfrac{n\left(\overline{\mathrm{X}}-\mu_0\right)^2}{(n-1)\dfrac{\sum_{i=1}^{n}\left(\mathrm{X}_i-\overline{\mathrm{X}}\right)^2}{(n-1)}}}\right)^{n/2} = \left(\frac{1}{1+\dfrac{t^2}{(n-1)}}\right)^{n/2} ,$$

όπου $t = \dfrac{\sqrt{n}\left(\overline{\mathrm{X}}-\mu_0\right)}{\sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}\left(\mathrm{X}_i-\overline{\mathrm{X}}\right)^2}{(n-1)}}} = \dfrac{\overline{\mathrm{X}}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$.

Απορρίπτω την H_0 , όταν $\lambda\le k \Leftrightarrow t^2\ge c$ ή $t\le -c_1$,

δηλαδή όταν $t\le -t_{n-1,\alpha}$.

Εδώ, $n=17,$ $\alpha=0.10,$ $\overline{\mathrm{X}}=324.8,$ $S=40$.

$$t = \frac{324.8-335}{40/\sqrt{17}} = -1.051$$

$-t_{n-1,\alpha} = -t_{16,0.1} = -1.337$, δηλαδή δεν απορρίπτω την H_0 .

57. Από την άσκηση 56., απορρίπτω την H_0 όταν $t\ge t_{n-1,\alpha}$.

$$t = \frac{\overline{\mathrm{X}}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} = \frac{1.84-1.8}{2.2/\sqrt{121}} = 0.2$$

$t_{n-1,\alpha} = t_{120,0.1} = 1.282$ (προσέγγιση από την κανονική.)

Άρα σε επίπεδο σημαντικότητας 0.1, δεν απορρίπτω την H_0 .

p-value $= \mathrm{P}\left(t_{120}>0.2\right) = \mathrm{P}\left(\mathrm{Z}>0.2\right) = 0.4207$.

Άρα για $\alpha>0.4207$, απορρίπτω την H_0 .

58. $X_1,...,X_n \sim \text{E}\kappa\theta(\theta) \quad \Rightarrow \quad f(\chi,\theta) = \theta \cdot e^{-\theta\chi}$

$H_0 : \theta = \theta_0$ προς $H_1 : \theta \neq \theta_0$.

Εκτιμήτρια Μέγιστης Πιθανοφάνειας όταν ισχύει η H_0 : $\hat{\hat{\theta}} = \theta_0$. Για την Εκτιμήτρια Μέγιστης Πιθανοφάνειας για ολόκληρο τον παραμετρικό χώρο, $L\left(\underset{\sim}{\chi},\theta\right) = \theta^n \cdot e^{-\theta\sum_{i=1}^{n} X_i} \quad \Rightarrow \quad \log L\left(\underset{\sim}{\chi},\theta\right) = n\log\theta - \theta\sum_{i=1}^{n} X_i$

$$\Rightarrow \quad S(\theta) = \frac{n}{\theta} - \sum_{i=1}^{n} X_i \quad \overset{S(\theta)=0}{\Rightarrow} \quad \hat{\theta} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} X_i} = \frac{1}{\overline{X}}$$

Άρα,

$$\lambda = \frac{\sup_{\theta\in\Theta_0} L\left(\theta \mid \underset{\sim}{\chi}\right)}{\sup_{\theta\in\Theta} L\left(\theta \mid \underset{\sim}{\chi}\right)} = \frac{\theta_0^n \cdot e^{-\theta_0\sum_{i=1}^{n} X_i}}{\left(\frac{1}{\overline{X}}\right)^n . e^{-\frac{1}{\overline{X}}\sum_{i=1}^{n} X_i}} = \left(\overline{X}\theta_0\right)^n \cdot e^{\sum_{i=1}^{n} X_i\left(\frac{1}{\overline{X}} - \theta_0\right)}$$

$$= \left(\overline{X}\theta_0\right)^n \cdot e^{\left(n - n\theta_0\overline{X}\right)} = \left(\theta_0\overline{X} \cdot e^{-\theta_0\overline{X}}\right)^n \cdot e^n$$, φθίνουσα συνάρτηση του $\overline{X}$

Άρα απορρίπτω την H_0 όταν $\lambda \leq k \quad \Leftrightarrow \quad \left(\theta_0\overline{X} \cdot e^{-\theta_0\overline{X}}\right)^n \cdot e^n \leq k$,

δηλαδή όταν $\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} Xi}{n} \leq c_1^*$ ή $\overline{X} \geq c_2^* \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} X_i \geq c_1$ ή $\sum_{i=1}^{n} X_i \leq c_2$.

59. Στο θεώρημα Neyman- Pearson, απλή προς απλή υπόθεση και έχουμε ότι όταν ισχύει η H_0, $L_0 = \prod_{i=1}^{n} f(\chi_i, \theta_0)$,

ενώ όταν ισχύει η H_1, $L_1 = \prod_{i=1}^{n} f(\chi_i, \theta_1)$.

Η κρίσιμη περιοχή είναι τότε η $\frac{L_0}{L_1} \leq k$ (1)

Όταν έχω απλή προς απλή υπόθεση στον έλεγχο πηλίκου πιθανοφάνειας,

$$\lambda = \frac{\sup_{\theta\in\Theta_0} \prod_{i=1}^{n} f(\chi_i,\theta)}{\sup_{\theta\in\Theta_1} \prod_{i=1}^{n} f(\chi_i,\theta)} = \frac{\prod_{i=1}^{n} f(\chi_i,\theta_0)}{\prod_{i=1}^{n} f(\chi_i,\theta_1)} = \frac{L_0}{L_1}$$

Απορρίπτω τότε την H_0 όταν $\lambda \leq k \quad \Leftrightarrow \quad \frac{L_0}{L_1} \leq k$ (2)

Από τις (1) και (2) συμπεραίνουμε ότι ο έλεγχος πηλίκου πιθανοφάνειας για έλεγχο απλής προς απλή υπόθεση, οδηγεί στην ίδια κρίσιμη περιοχή με αυτήν που δίνεται από το θεώρημα Neyman- Pearson.

60. $X_1,\ldots,X_n \sim N(\theta_1,\theta_3)$; $Y_1,\ldots,Y_m \sim N(\theta_2,\theta_4)$.

$H_0:\ \theta_1=\theta_2\ ;\ \theta_3=\theta_4$ προς $H_1:\ \theta_1\neq\theta_2\ ;\ \theta_2\neq\theta_4$.

$$L\left(\underset{\sim}{\chi},\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4\right) = \left(\frac{1}{2\pi\theta_3}\right)^{n/2}\cdot e^{-\frac{1}{2\theta_3}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\theta_1)^2}\cdot\left(\frac{1}{2\pi\theta_4}\right)^{m/2}\cdot e^{-\frac{1}{2\theta_4}\sum_{j=1}^{m}(Y_j-\theta_2)^2} .$$

Όταν ισχύει η H_0, $\theta_1=\theta_2$, $\theta_3=\theta_4$ και οι Ε.Μ.Π. των $\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4$ είναι

$$\hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}X_i+\sum_{j=1}^{m}Y_j}{n+m} = \frac{n\overline{X}+m\overline{Y}}{n+m}$$

και $\hat{\theta}_3 = \hat{\theta}_4 = \frac{1}{n+m}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\hat{\theta}\right)^2+\sum_{j=1}^{m}\left(Y_j-\hat{\theta}\right)^2\right)$

Για ολόκληρο τον παραμετρικό χώρο οι αντίστοιχες Ε.Μ.Π. είναι

$\hat{\theta}_1 = \overline{X}$, $\hat{\theta}_2 = \overline{Y}$,

$\hat{\theta}_3 = \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2$, $\hat{\theta}_4 = \frac{1}{m}\cdot\sum_{j=1}^{m}\left(Y_j-\overline{Y}\right)^2$

$$\lambda = \frac{\sup_{\theta\in\Theta_0}L\left(\underset{\sim}{\chi}\,|\,\theta\right)}{\sup_{\theta\in\Theta}L\left(\underset{\sim}{\chi}\,|\,\theta\right)} =$$

$$\frac{\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}+\frac{m}{2}}\left(\frac{1}{\hat{\theta}_3}\right)^{\frac{n}{2}+\frac{m}{2}}\exp\left(\left(-\frac{n+m}{2\left\{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\hat{\theta}\right)^2+\sum_{j=1}^{m}\left(Y_j-\hat{\theta}\right)^2\right\}}\right)\left\{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\hat{\theta}\right)^2+\sum_{j=1}^{m}\left(Y_j-\hat{\theta}\right)^2\right\}\right)}{\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}+\frac{m}{2}}\left(\frac{1}{\hat{\hat{\theta}}_3}\right)^{\frac{n}{2}}\left(\frac{1}{\hat{\hat{\theta}}_4}\right)^{\frac{m}{2}}\exp\left(-\frac{n}{2\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2\right)\exp\left(-\frac{m}{2\sum_{j=1}^{m}\left(Y_j-\overline{Y}\right)^2}\cdot\sum_{j=1}^{m}\left(Y_j-\overline{Y}\right)^2\right)}$$

Άρα $$\lambda = \frac{\left(\frac{n+m}{\sum_{i=1}^{m}\left(X_i-\hat{\theta}\right)^2+\sum_{j=1}^{m}\left(Y_j-\hat{\theta}\right)^2}\right)}{\left(\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2}\right)^{\frac{n}{2}}\cdot\left(\frac{m}{\sum_{j=1}^{m}\left(Y_j-\overline{Y}\right)^2}\right)^{\frac{m}{2}}}$$

Όμως σύμφωνα με το θεώρημα του Wald, και αφού η H_0 θέτει δύο περιορισμούς, $-2\log\lambda \ \underset{n\to\infty}{\overset{D}{\to}}\ \chi_2^2$

απ' όπου βρίσκουμε και τον έλεγχο πηλίκου πιθανοφάνειας.

61. (α) Έστω λ ο έλεγχος πηλίκου πιθανοφάνειας,

$$L\left(\underset{\sim}{\chi}\right) = \binom{n}{\chi_1\ \chi_2 \cdots \chi_k} \cdot p_1^{\chi_1} \cdot p_2^{\chi_2} \cdots p_k^{\chi_k}$$

Βρίσκουμε τις Εκτιμήτριες Μεγίστης Πιθανοφάνειας :

Για ολόκληρο τον παραμετρικό χώρο, $\hat{p}_i = \dfrac{X_i}{n}$, $i = 1,\ldots,k$.

Όταν ισχύει η H_0 , $\hat{p}_i = p_{i0}$, $i = 1,\ldots,k$.

Άρα, $$\lambda = \frac{\sup\limits_{\theta\in\Theta_0} L\left(\underset{\sim}{P} \mid \underset{\sim}{\chi}\right)}{\sup\limits_{\theta\in\Theta} L\left(\underset{\sim}{P} \mid \underset{\sim}{\chi}\right)} = \frac{\dfrac{n}{\chi_1!\ldots\chi_k!} \cdot \prod\limits_{i=1}^{k} p_{i0}^{\chi_i}}{\dfrac{n}{\chi_1!\ldots\chi_k!} \cdot \prod\limits_{i=1}^{k} \left(\dfrac{X_i}{n}\right)^{\chi_i}} = \prod_{i=1}^{k} \left(\frac{np_{i0}}{\chi_i}\right)^{\chi_i} .$$

(β) Θεώρημα:

$$X_1,\ldots,X_k \text{ ανεξάρτητα } \sim P(\lambda_i),\quad i = 1,\ldots,k \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} X_i \sim Mult\left(n, \frac{\lambda_i}{\sum\limits_{i=1}^{k}\lambda_i}\right)$$

|

$$P\left(X_1 = \chi_1, X_2 = \chi_2,\ldots,X_k = \chi_k \mid \sum_{i=1}^{k} X_i = n\right) = \frac{P\left(X_1 = \chi_1,\ldots,X_k = \chi_k, \sum\limits_{i=1}^{k} X_i = n\right)}{P\left(\sum\limits_{i=1}^{n} X_i = n\right)}$$

$$= \frac{P(X_1 = \chi_1)\cdots P(X_k = \chi_k)}{P\left(\sum\limits_{i=1}^{k} X_i = n\right)} = \frac{\dfrac{1}{\chi_1!}\cdot e^{-\lambda_1}\cdot\lambda_1^{\chi_1}\cdots\dfrac{1}{\chi_k!}\cdot e^{-\lambda_k}\cdot\lambda_k^{\chi_k}}{\dfrac{1}{n!}\cdot e^{-\sum\lambda_i}\cdot\left(\sum\lambda_i\right)^n}$$

$$= \frac{n!}{\chi_1!\cdots\chi_k!}\cdot\left(\frac{\lambda_1}{\sum\lambda_i}\right)^{\chi_1}\cdots\left(\frac{\lambda_k}{\sum\lambda_i}\right)^{\chi_k} \quad : \text{ πολυωνυμική κατανομή}$$

Εδώ,

$$X_i \sim P(n_i\cdot\lambda_i);\qquad X_1, X_2, X_3, X_4 \mid \sum_{i=1}^{4} X_i = t \sim Mult(t, p_1, p_2, p_3, p_4)$$

$$H_0 :\ \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4$$

$$\Leftrightarrow\ H_0 :\ p_1 = \frac{n_1\cdot\lambda}{\sum\limits_{i=1}^{4} n_i\cdot\lambda} = \frac{n_1}{\sum\limits_{i=1}^{4} n_i} = \frac{120}{445},\quad p_2 = \frac{n_2}{\sum\limits_{i=1}^{4} n_i} = \frac{100}{445},\quad p_3 = \frac{100}{445},\quad p_4 = \frac{125}{445}$$

Δίνεται ότι $-2\log\lambda \approx \sum\limits_{i=1}^{4}\dfrac{(X_i - tp_i)^2}{np_i} \sim \mathcal{X}^2_{4-1}$ σύμφωνα με την υπόθεση.

Έτσι έχουμε

$$-2\log\lambda \approx \frac{\left(X_1 - t\cdot\dfrac{120}{445}\right)^2}{t\cdot\dfrac{120}{445}} + \cdots + \frac{\left(X_4 - t\cdot\dfrac{125}{445}\right)^2}{t\cdot\dfrac{125}{445}} \overset{t=\sum_{i=1}^{4} X_i = 1180}{=} 81.22$$

Απορρίπτω την H_0 όταν $-2\log\lambda > \mathcal{X}^2_{4-1,\alpha} = \mathcal{X}^2_{3,0.05} = 7.814$.

Άρα σε επίπεδο σημαντικότητας 5% απορρίπτω την H_0 .

62. $\mathrm{H}_0: \ \theta_1 = \theta_2$ προς $\mathrm{H}_1: \theta_1 \neq \theta_2$

$$L\left(\theta_1, \theta_2 \mid \underset{\sim}{\mathrm{X}}, \underset{\sim}{\mathrm{Y}}\right) = \prod_{i=1}^{n_1} \theta_1 \cdot e^{-\theta_1 \cdot \chi_i} \cdot \prod_{j=1}^{n_2} \theta_2 \cdot e^{-\theta_2 \cdot y_j} = \theta_1^{n_1} \cdot \theta_2^{n_2} \cdot e^{-\theta_1 \cdot \sum_{i=1}^{n_1} \mathrm{X}_i} \cdot e^{-\theta_2 \cdot \sum_{j=1}^{n_2} \mathrm{Y}_j} .$$

Ε.Μ.Π. για όλο τον παραμετρικό χώρο : $\hat{\theta}_1 = \dfrac{1}{\overline{\mathrm{X}}}, \quad \hat{\theta}_2 = \dfrac{1}{\overline{\mathrm{Y}}}$.

Όταν ισχύει η H_0, $\theta_1 = \theta_2 = \theta \quad \Rightarrow \quad L\left(\theta, \underset{\sim}{\mathrm{X}}, \underset{\sim}{\mathrm{Y}}\right) = \theta^{n_1+n_2} \cdot e^{-\theta\left(\sum_{i=1}^{n_1} \mathrm{X}_i + \sum_{j=1}^{n_2} \mathrm{Y}_j\right)}$

$$\Rightarrow \quad l(\theta) = (n_1 + n_2)\log\theta - \theta\left(\sum_{i=1}^{n_1} \mathrm{X}_i + \sum_{j=1}^{n_2} \mathrm{Y}_j\right)$$

$$\Rightarrow \quad S(\theta) = \frac{n_1 + n_2}{\theta} - \left(\sum \mathrm{X}_i + \sum \mathrm{Y}_j\right) \quad \underset{S(\theta)=0}{\overset{\text{Ε.Μ.Π.}}{\Rightarrow}} \quad \hat{\theta} = \frac{n_1 + n_2}{n_1 \cdot \overline{\mathrm{X}} + n_2 \cdot \overline{\mathrm{Y}}}$$

$$\text{Άρα} \quad \lambda = \frac{\left(\dfrac{n_1 + n_2}{n_1\overline{\mathrm{X}} + n_2\overline{\mathrm{Y}}}\right)^{n_1+n_2} \cdot e^{-\frac{n_1+n_2}{n_1\overline{\mathrm{X}}+n_2\overline{\mathrm{Y}}} \cdot \left(n_1\overline{\mathrm{X}}+n_2\overline{\mathrm{Y}}\right)}}{\left(\dfrac{1}{\overline{\mathrm{X}}}\right)^{n_1} \cdot e^{-\frac{1}{\overline{\mathrm{X}}} \cdot n_1 \cdot \overline{\mathrm{X}}} \cdot \left(\dfrac{1}{\overline{\mathrm{Y}}}\right)^{n_2} \cdot e^{-\frac{1}{\overline{\mathrm{Y}}} \cdot n_2 \overline{\mathrm{Y}}}}$$

$$= \frac{(n_1 + n_2)^{n_1+n_2}}{n_1^{n_1} \cdot n_2^{n_2}} \cdot \left(\frac{\sum \mathrm{X}_i}{\sum \mathrm{X}_i + \sum \mathrm{Y}_j}\right)^{n_1} \cdot \left(\frac{\sum \mathrm{Y}_j}{\sum \mathrm{X}_i + \sum \mathrm{Y}_j}\right)^{n_2}$$

$$= c(n_1, n_2) \cdot \left(\frac{\sum \mathrm{X}_i / \sum \mathrm{Y}_j}{1 + \sum \mathrm{X}_i / \sum \mathrm{Y}_j}\right)^{n_1} \cdot \left(\frac{1}{1 + \sum \mathrm{X}_i / \sum \mathrm{Y}_j}\right)^{n_2} \quad := \quad c \cdot \alpha^{n_1} \cdot (1 - \alpha)^{n_2}$$

που μπορεί να θεωρηθεί ως *Beta* κατανομή.

$$f_{\mathrm{X}}(\chi) = \theta_1 \cdot e^{-\theta_1 \cdot \chi}$$

$$z := 2\theta_1\chi \quad \Rightarrow \quad \chi = \frac{z}{2\theta_1} \quad \Rightarrow \quad d\chi = \frac{dz}{2\theta_1}$$

$$\text{Άρα} \quad f_{\mathrm{Z}}(z) = \theta_1 \cdot e^{-\theta_1 \cdot z / 2\theta_1} \cdot \frac{1}{2\theta_1} = \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{z}{2}} \sim \mathrm{E}\kappa\theta\left(\frac{1}{2}\right) = \mathcal{X}_2^2 .$$

$$\Rightarrow \quad 2\theta_1 \sum_{i=1}^{n_1} \mathrm{X}_i \sim \mathcal{X}_{2n_1}^2 , \quad \text{και} \quad 2\theta_2 \sum_{j=1}^{n_2} \mathrm{Y}_j \sim \mathcal{X}_{2n_2}^2$$

$$\text{Κάτω από την } \mathrm{H}_0, \ \theta_1 = \theta_2, \quad \frac{\dfrac{2\theta_1 \sum_{i=1}^{n_1} \mathrm{X}_i}{2n_1}}{\dfrac{2\theta_2 \sum_{j=1}^{n_2} \mathrm{Y}_j}{2n_2}} = \frac{\overline{\mathrm{X}}}{\overline{\mathrm{Y}}} \sim F_{2n_1, 2n_2} .$$

Απορρίπτω την H_0 για $F_{2n_1,2n_2} > F_{2n_1,2n_2,\frac{\alpha}{2}}$ ή $F_{2n_1,2n_2} < F_{2n_1,2n_2,,1-\frac{\alpha}{2}}$.