Θα βρούμε με άλλη μέθοδο (τρίτη κατά σειρά) το F-test για την ανάλυση της διακύμανσης κατά ένα παράγοντα.

Έστω το μοντέλο $Y_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij}$, $i = 1,...,I$, $j = 1,...,n_i$, $\varepsilon_{ij} \sim N(0,\sigma^2)$.

Τότε ισχύει η παρακάτω:

<u>Πρόταση:</u> E(MS_{bet})=E $[\sum_{i=1}^{I} n_i(\overline{Y}_{i.} - \overline{Y}_{..})^2]$ = $\sigma^2 + \frac{1}{I-1}\sum_{i=1}^{I} n_i \alpha_i^2$.

Έχω ότι E $[\sum_{i=1}^{I} n_i(\overline{Y}_{i.} - \overline{Y}_{..})^2]$ = $\sum_{i=1}^{I} n_i$ E $(\overline{Y}_{i.} - \overline{Y}_{..})^2$.

Αλλά E $(\overline{Y}_{i.} - \overline{Y}_{..})^2$ = Var $(\overline{Y}_{i.} - \overline{Y}_{..})$ + E^2 $(\overline{Y}_{i.} - \overline{Y}_{..})$.

E $(\overline{Y}_{i.} - \overline{Y}_{..})$ = $(\mu + \alpha_i)$ - (μ) = α_i .

Var $(\overline{Y}_{i.} - \overline{Y}_{..})$ = Var($\overline{Y}_{i.}$) + Var($\overline{Y}_{..}$) - 2Cov($\overline{Y}_{i.}, \overline{Y}_{..}$) = $\frac{\sigma^2}{n_i} + \frac{\sigma^2}{n} - 2\frac{\sigma^2}{n} = \frac{\sigma^2}{n_i} - \frac{\sigma^2}{n}$.

Άρα E(MS_{bet}) = $\sum_{i=1}^{I} n_i \{(\frac{\sigma^2}{n_i} - \frac{\sigma^2}{n}) + \alpha_i^2\} / (I-1)$ = $\sum_{i=1}^{I} (\sigma^2 - \frac{n_i}{n}\sigma^2 + n_i \alpha_i^2) / (I-1)$

= $\frac{I\sigma^2 - \sigma^2}{I-1} + \frac{1}{I-1}\sum_{i=1}^{I} n_i \alpha_i^2 = \sigma^2 + \frac{1}{I-1}\sum_{i=1}^{I} n_i \alpha_i^2$.

Όταν ισχύει η μηδενική υπόθεση $H_0 : \alpha_1 = ... = \alpha_I = 0$,

τότε E(MS_{bet})= σ^2 .

Οπότε λοιπόν $\frac{MS_{bet}}{MS_{with}} \cong 1$, αφού E(MS_{with})= σ^2 πάντα.

Άρα, απορρίπτω την H_0 αν $\frac{MS_{bet}}{MS_{with}} > c$, όπου $c = F_{I-1;n-I;\alpha}$.

<u>Πολλαπλές συγκρίσεις:</u>

Πολλαπλές συγκρίσεις είναι μέθοδοι για τη σύγκριση των επιπέδων $1,\ldots,I$ (εφ' όσον η H_0 απορριφθεί). Θα αναφέρουμε 4 τέτοιες μεθόδους.

<u>Α) Μέθοδος της Ελάχιστης Σημαντικής Διαφοράς.</u>

Συνίσταται στη σύγκριση των επιπέδων του παράγοντα ανά 2 καθ' όλους τους δυνατούς τρόπους με t-ελεγχοσυνάρτηση ως εξής:

$H_0^{*}: \alpha_i = \alpha_\kappa$ προς $H_1^{*}: \alpha_i \neq \alpha_\kappa$.

$Y_{ij} \sim N(\mu + \alpha_i, \sigma^2)$, $j = 1,...,n_i$.

$Y_{\kappa j} \sim N(\mu + \alpha_\kappa, \sigma^2)$, $j = 1,\ldots,n_\kappa$.

Άρα η ελεγοσυνάρτηση $t = \frac{\overline{Y}_{i.} - \overline{Y}_{\kappa.}}{\hat{\sigma}\sqrt{\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_\kappa}}}$ $\Bigg\}$ $t \sim t_{n-I}$

όπου $\hat{\sigma}^2 = MS_{with} = \frac{1}{n-I}\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{n_i}(Y_{ij} - \overline{Y}_{i.})^2$ $\Bigg\}$ όταν ισχύει η H_0 .

Απορρίπτουμε την H_0 όταν

$$|t| > t_{n-I;\alpha/2} \Leftrightarrow \left|\overline{Y}_{i.} - \overline{Y}_{\kappa.}\right| > \underbrace{t_{n-I;\alpha/2}.\hat{\sigma}\sqrt{\frac{1}{n_i}+\frac{1}{n_\kappa}}}_{\text{ελάχιστη σημαντική διαφορά.}} .$$

Για να δούμε ποιο επίπεδο έχει μεγαλύτερες τιμές εξετάζουμε το πρόσημο της διαφοράς $\overline{Y}_{i.} - \overline{Y}_{\kappa.}$.

<u>Παράδειγμα:</u>

Μέθοδος 1	52.9	62.1	57.4	50	59.3	61.2	60.8	53.1
Μέθοδος 2	58.4	55	59.8	62.5	64.7	59.9	54.7	58.5
Μέθοδος 3	71.3	66	63.4	64.7	75.8	65.6	72.9	67.3

Εδώ έχω $I = 3$, $n = 24$, $n_1 = n_2 = n_3 = 8$.
Από υπολογισμούς έχω: $\overline{Y}_{1.} = 57.1$, $\overline{Y}_{2.} = 59.175$ και $\overline{Y}_{3.} = 68.45$.
Ο πίνακας ΑΝΑΔΙΑ είναι:

Πηγή Μετα-βλητότητας	**Άθροισμα Τετραγώνων**	**β.ε.**	**Μέσα Τετράγωνα**	**F**
Παράγοντας	584.41	2	292.205	
Υπόλοιπα	360.015	21	17.144	17.044
Ολικό	944.425	23		

Αλλά αν α=5%, $F_{2;21;0.05} \approx 4$, οπότε απορρίπτουμε την H_0 και συμπεραίνουμε ότι υπάρχουν διαφορές ανάμεσα στις 3 μεθόδους.

Η ελάχιστη σημαντική διαφορά είναι:

$$t_{21;0.025}\hat{\sigma}\sqrt{\frac{1}{8}+\frac{1}{8}} = 2.08\sqrt{17.144}\sqrt{\frac{2}{8}} = 4.306 .$$

Άρα, συγκρίνοντας:

- (1) - (2) έχω $\left|\overline{Y}_{1.} - \overline{Y}_{2.}\right| = |-2.075| < 4.306$ και άρα οι μέθοδοι (1) και (2) δεν διαφέρουν.
- (1) - (3) έχω $\left|\overline{Y}_{1.} - \overline{Y}_{3.}\right| = |-11.35| > 4.306$ και άρα οι μέθοδοι (1) και (3) διαφέρουν.
- (2) - (3) έχω $\left|\overline{Y}_{2.} - \overline{Y}_{3.}\right| \approx |-9| > 4.306$ και άρα οι μέθοδοι (2) και (3) διαφέρουν.