B) Μέθοδος Πολλαπλών Συγκρίσεων του Tukey

Βασίζεται στο μαθηματικοποιημένο εύρος και εφαρμόζεται όταν $n_i = n_j = n^*$, $\forall i, j$.

Ορισμός:
Έστω $X_1, \ldots, X_n$ τυχαίο δείγμα από $N(\mu, \sigma^2)$.
$R_n = \max X_i - \min X_i$ (εύρος των $X_i$)
Έστω ακόμα $Y$ μια τυχαία μεταβλητή ανεξάρτητη των $X_i$: $Y/\sigma^2 \sim \mathrm{X}^2_v$.
Τότε η τ.μ. $q = \dfrac{R}{\sqrt{Y/v}}$ ονομάζεται μαθηματικοποιημένο εύρος
και γράφουμε $q \sim q_{n;v}$.

Η κατανομή του $q$ δεν εξαρτάται από $\mu$ και $\sigma$.

Έχω ότι $q = \dfrac{\max X_i - \min X_i}{\sqrt{Y/v}} = \dfrac{\max\limits_{i \neq j} |X_i - X_j|}{\sqrt{Y/v}}$

$= \max\limits_{i \neq j} \dfrac{|(Z_i\sigma + \mu) - (Z_j\sigma + \mu)|}{\sqrt{Y/v}}$ , αφού $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

$= \max\limits_{i \neq j} \dfrac{|Z_i - Z_j|}{\sqrt{Y/\sigma^2 v}} = \dfrac{\max\limits_{i \neq j} |Z_i - Z_j|}{\sqrt{\mathrm{X}^2_v/v}} \sim q_{n;v}$.

Άρα, δεν εξαρτάται από τις παραμέτρους $\mu$ και $\sigma$.

Παράδειγμα:
$X_1, \ldots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$ }

και έστω $Y = \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2$. } $\Rightarrow q = \dfrac{\max\limits_{i \neq j} |X_i - X_j|}{\sqrt{Y/n-1}} \sim q_{n;n-1}$.

Τότε $Y/\sigma^2 \sim \mathrm{X}^2_{n-1}$ }

Για ορισμένες τιμές των $n$ και $v$, υπάρχουν πίνακες με ποσοστιαία σημεία, δηλ. αριθμοί $q^{\alpha}_{n;v} : P(q > q^{\alpha}_{n;v}) = \alpha$.

Θα χρησιμοποιήσουμε την έννοια του μαθηματικοποιημένου εύρους για να υπολογίσουμε ΤΑΥΤΟΧΡΟΝΑ ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΑ ΕΜΠΙΣΤΟΣΥΝΗΣ για όλες τις διαφορές $\alpha_i - \alpha_\kappa$.

Επειδή $n_i = n_\kappa = n^*$, έχω ότι $\overline{Y}_{i.} - \alpha_i \sim N(\mu, \dfrac{\sigma^2}{n^*})$, $i = 1, \ldots, I$

Ορίζω $Y$ έτσι ώστε $Y/(\sigma^2 / n^*) \sim \mathrm{X}^2_v$.

Επειδή $(n - I)\dfrac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \sim \mathrm{X}^2_{n-I}$, όπου $\hat{\sigma}^2 = MS_{with}$.

Θέτω $Y=(n-I)\dfrac{\hat{\sigma}^2}{n^*}$, οπότε $Y \big/ (\sigma^2/n^*) \sim X^2_{n-I}$.

Άρα, η τυχαία μεταβλητή

$$q=\max_{i\neq j}\frac{|(\overline{Y}_{i.}-\alpha_i)-(\overline{Y}_{\kappa.}-\alpha_\kappa)|}{\sqrt{Y \big/ (n-I)}}=\max_{i\neq j}\frac{|(\overline{Y}_{i.}-\overline{Y}_{\kappa})-(\alpha_i-\alpha_\kappa)|}{\sqrt{\sigma^2 \big/ n^*}}\sim q_{I;n-I}$$

Άρα, από τους πίνακες μπορούμε να υπολογίσουμε σημεία $q^{\alpha}_{I;n-I}$ έτσι ώστε

$$P(q\leq q^{\alpha}_{I;n-I})=1-\alpha\Rightarrow$$

$$P(\max_{i\neq j}\frac{|(\overline{Y}_{i.}-\overline{Y}_{\kappa})-(\alpha_i-\alpha_\kappa)|}{\sqrt{\sigma^2 \big/ n^*}}\leq q^{\alpha}_{I;n-I})=1-\alpha\Rightarrow$$

$$P(\max_{i\neq j}\frac{|(\overline{Y}_{i.}-\overline{Y}_{\kappa})-(\alpha_i-\alpha_\kappa)|}{\sqrt{\sigma^2 \big/ n^*}}\leq q^{\alpha}_{I;n-I}\ ,\forall i\neq\kappa)=1-\alpha\Rightarrow$$

$$P(\ (\overline{Y}_{i.}-\overline{Y}_{\kappa.})-(\hat{\sigma}/\sqrt{n^*})\ q^{\alpha}_{I;n-I}\leq(\alpha_i-\alpha_\kappa)\leq\overline{Y}_{i.}-\overline{Y}_{\kappa.}+(\hat{\sigma}/\sqrt{n^*})\ q^{\alpha}_{I;n-I}=1-\alpha.$$

Επομένως, τα ζητούμενα διαστήματα εμπιστοσύνης είναι

$$(\overline{Y}_{i.}-\overline{Y}_{\kappa.})\pm q^{\alpha}_{I;n-I}\ (\hat{\sigma}/\sqrt{n^*}).$$

Τα διαστήματα αυτά ονομάζονται ταυτόχρονα επειδή ισχύουν ΟΛΕΣ οι ανισότητες με πιθανότητα $(1-\alpha)$.

Ελεγχοσυνάρτηση:

$H^*_0:\alpha_i=\alpha_\kappa$.

Από τα διαστήματα εμπιστοσύνης ο έλεγχος γίνεται με την εξέταση ότι το 0 ανήκει στο διάστημα εμπιστοσύνης.

Απορρίπτουμε $H_0$ αν $0\notin$ Δ.Ε.

Διαφορές μεταξύ μεθόδων (Α) και (Β):

- Η μέθοδος (Β) δίνει ταυτόχρονα $(1-\alpha)\%$ διαστήματα εμπιστοσύνης και ισχύει αν $n_i=n_\kappa=n^*$.
- Η (Α) δίνει $(1-\alpha)\%$ διάστημα εμπιστοσύνης για κάθε μία από τις υποθέσεις ξεχωριστά.

Γ) Μέθοδος Πολλαπλών Συγκρίσεων του Scheffé

Η μέθοδος του Scheffé ÷ñçóéìïðïéåßται όχι μόνο για σύγκριση ζευγών δοκιμασιών αλλά και για σύγκριση περισσοτέρων των δύο δοκιμασιών.

π.χ. $\dfrac{\alpha_1+\alpha_2}{2}=\alpha_3$ (Οι μέθοδοι (επίπεδα) 1 και 2 είναι ισοδύναμα με το 3)

Γενικά θα βρούμε ταυτόχρονα Δ.Ε. για παραστάσεις της μορφής $L=\sum c_i\alpha_i$, όπου $c_i$ συντελεστές έτσι ώστε $\sum_{i=1}^{I}c_i=0$.

Η $L$ ονομάζεται γραμμική αντίθεση (linear contrasts).

Έχουμε ότι μια αμερόληπτη εκτιμητρια της $L$ είναι

$$\hat{L} = \sum_{i=1}^{I} c_i \, (\overline{Y}_{i.} - \overline{Y}_{..}) = \sum_{i=1}^{I} c_i \ \hat{\alpha}_i = \sum_{i=1}^{I} c_i \ \overline{Y}_{i.}$$

με διακύμανση Var( $\hat{L}$ )$= \sum_{i=1}^{n} c_i^2 \frac{\sigma^2}{n_i} = \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i^2}{n_i}$.

Αν ορίσω $K^2 = (I-1)F_{I-1;n-I;\alpha}$, τότε τα ταυτόχρονα διατήματα εμπιστοσύνης δίνονται από $\hat{L} \pm K\sqrt{\hat{\sigma}^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i^2}{n_i}}$ , όπου $\hat{\sigma}^2 = MS_{res} = \frac{SS_{with}}{n-I}$ .

Για παράδειγμα, αν συγκρίνω το $i$ επίπεδο με το $\kappa$ επίπεδο, τότε έχω για $c_i = 1$ και $c_\kappa = -1$:

$$(\hat{\alpha}_i - \hat{\alpha}_\kappa) \pm K\sqrt{\hat{\sigma}^2 (\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_\kappa})} \ .$$

Αν θέλω να ελέγξω $H_0: \ \alpha_i = \alpha_\kappa$ εξετάζω αν το 0 ανήκει στο Δ.Ε.

<u>Δ) Μέθοδος Bonferroni</u>

Αν έχω $g$ γραμμικές σχέσεις $L$ που θέλω να ελέγξω, τότε

$$\hat{L} \pm t_{n-I;\frac{\alpha}{2g}} \sqrt{Va\hat{r}(\hat{L})} \ .$$

π.χ. $H_0: \ \alpha_i - \alpha_\kappa = 0$ τότε $g = 2$

$\alpha_i - \alpha_\lambda = 0$

και ένα δ.ε. για $L_1 = \alpha_i - \alpha_\kappa$ είναι }

$$(\hat{\alpha}_i - \hat{\alpha}_\kappa) \pm t_{n-I;\frac{\alpha}{2.2}} \sqrt{\hat{\sigma}^2 (\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_\kappa})} \quad \}$$

} ταυτόχρονα διαστήματα

ενώ για την $L_2 = \alpha_i - \alpha_\lambda$ είναι } εμπιστοσύνης για $L_1$ και $L_2$

$$(\hat{\alpha}_i - \hat{\alpha}_\lambda) \pm t_{n-I;\frac{\alpha}{4}} \sqrt{\hat{\sigma}^2 (\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_\lambda})} \quad \}$$