Πρόταση: Για το μοντέλο ΑΝΑΔΙΑ κατά δύο παράγοντες με μία παρατήρηση ανά κυψελίδα, έχω ότι: (ΔΕΝ ΧΡΕΙΑΖΟΜΑΣΤΕ ΚΑΝΟΝΙΚΟΤΗΤΑ)

1) Ε(MS_{res})=σ^2 (MS_{res} είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια του σ^2)

2) Ε(MS_A)=$\sigma^2 + J\sum_{i=1}^{I}\alpha_i^2 / (I-1)$

3) Ε(MS_B)=$\sigma^2 + I\sum_{j=1}^{J}\beta_j^2 / (J-1)$

Απόδειξη:

1) Ε(MS_{res})=$\dfrac{1}{(I-1)(J-1)}\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}$ Ε(Y_{ij}-$\overline{Y}_{i.}$-$\overline{Y}_{.j}$+$\overline{Y}_{..}$$)^2$.

Αλλά Ε(Y_{ij}-$\overline{Y}_{i.}$-$\overline{Y}_{.j}$+$\overline{Y}_{..}$)=($\mu+\alpha_i+\beta_j$)-($\mu+\alpha_i$)-($\mu+\beta_j$)+μ=0

και Var[(Y_{ij}-$\overline{Y}_{i.}$)-($\overline{Y}_{.j}$-$\overline{Y}_{..}$)] = Var(Y_{ij}-$\overline{Y}_{i.}$) + Var($\overline{Y}_{.j}$-$\overline{Y}_{..}$) - 2Cov(Y_{ij}-$\overline{Y}_{i.}$, $\overline{Y}_{.j}$-$\overline{Y}_{..}$).

Έχω ότι: Var(Y_{ij}-$\overline{Y}_{i.}$) = $\sigma^2+\dfrac{\sigma^2}{J}-2\dfrac{\sigma^2}{J}=\sigma^2\dfrac{J-1}{J}$

Var($\overline{Y}_{.j}$-$\overline{Y}_{..}$) = $\dfrac{\sigma^2}{I}+\dfrac{\sigma^2}{IJ}-\dfrac{2\sigma^2}{IJ}=\sigma^2\dfrac{J-1}{IJ}$

Cov(Y_{ij}-$\overline{Y}_{i.}$, $\overline{Y}_{.j}$-$\overline{Y}_{..}$) = $\dfrac{\sigma^2}{I}-\dfrac{\sigma^2}{IJ}-\dfrac{\sigma^2}{IJ}+\dfrac{\sigma^2}{IJ}=\sigma^2\dfrac{J-1}{IJ}$

Άρα αντικαθιστώντας έχω ότι

Var[(Y_{ij}-$\overline{Y}_{i.}$)-($\overline{Y}_{.j}$-$\overline{Y}_{..}$)]=$\sigma^2\dfrac{(I-1)(J-1)}{IJ}$

και συνεπώς Ε(MS_{res})=σ^2.

2) Ε(MS_A)=$\dfrac{1}{I-1}J\sum_{i=1}^{I}$ Ε($\overline{Y}_{i.}$-$\overline{Y}_{..}$$)^2$.

Αλλά Ε($\overline{Y}_{i.}$-$\overline{Y}_{..}$)=($\mu+\alpha_i$)-$\mu=\alpha_i$

Var($\overline{Y}_{i.}$-$\overline{Y}_{..}$) = Var($\overline{Y}_{i.}$) + Var($\overline{Y}_{..}$) - 2 Cov($\overline{Y}_{i.}$, $\overline{Y}_{..}$) = $\dfrac{\sigma^2}{J}+\dfrac{\sigma^2}{IJ}-\dfrac{2\sigma^2}{IJ}=\sigma^2\dfrac{I-1}{IJ}$.

Άρα $\sum_{i=1}^{I}$ Ε($\overline{Y}_{i.}$-$\overline{Y}_{..}$$)^2=\sum_{i=1}^{I}\{\sigma^2\dfrac{I-1}{IJ}+\alpha_i^2\}=\sigma^2\dfrac{I-1}{J}+\sum_{i=1}^{I}\alpha_i^2$

οπότε Ε(MS_A)=$\sigma^2+\dfrac{J}{I-1}\sum_{i=1}^{I}\alpha_i^2$.

3) Η απόδειξη του (3) είναι αντίστοιχη με την (2).

Οι παραπάνω τύποι είναι χρήσιμοι γιατί δίνουν έναν άλλο τρόπο κατασκευής των ελεγχοσυναρτήσεων F.

Όταν ισχύει η $H_A:\alpha_i$=0, βλέπω από το (2) ότι Ε(MS_A)=σ^2 και συνεπώς συγκρίνοντας τα MS_A και MS_{res} έχω ότι θα απορρίψω την H_A αν $F_A=MS_A/MS_{res}$ παίρνει μεγάλες τιμές. Δηλαδή απορρίπτω αν $F_A>c$.

Παρατηρήσεις:

1) Εναλλακτικός τρόπος κατασκευής του F_A ή F_B δίνεται από την παρατήρηση ότι:

$H_A:\alpha_i$=0, $\forall i$ $\Leftrightarrow$ H_A^*:$\sum_{i=1}^{I}\alpha_i^2=0$.

Αν ονομάσω με θ την ποσότητα $\sum_{i=1}^{I}\alpha_i^2$, τότε η εκτιμήτριά της δίνεται από

$\hat{\theta} = \sum_{i=1}^{I}\hat{\alpha}_i^2 = \sum_{i=1}^{I}(\overline{Y}_{i.} - \overline{Y}_{..})^2 \propto SS_A$.

Απορρίπτουμε την H_A αν $\hat{\theta} > c$.

Όμως, γνωρίζω ότι $SS_A/\sigma^2 \sim \mathrm{X}_{I-1}^2$.

Επειδή δε γνωρίζω την παράμετρο σ^2, την εκτιμώ με MS_{res} και άρα έχω την F ελεγχοσυνάρτηση.

2) Η ίδια ακριβώς ανάλυση ισχύει αν ο αριθμός n_{ij} (αριθμός παρατηρήσεων ανά κυψελίδα) είναι ίσος με k, $\forall i, j$, ή αν τα n_{ij} ικανοποιούν τη σχέση $n_{ij} = \frac{n_{i.}n_{.j}}{n}$, όπου $n_{i.} = \sum_j n_{ij}$, $n_{.j} = \sum_i n_{ij}$, $n = \sum_i \sum_j n_{ij}$.