<u>Μοντέλο με Αλληλεπίδραση</u>

$Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk}$, $i = 1,\ldots,I$, $j = 1,\ldots,J$, $k = 1,\ldots,K$, ε_{ijk} (τ.δ.)~ $N(0,\sigma^2)$

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & B & & & \\
 & & 1 & 2 & \ldots & J & \\
 & 1 & & & \vdots & & \\
 & 2 & & & \vdots & & \\
A & \vdots & \ldots & \ldots & \begin{pmatrix} Y_{ij1} \\ \vdots \\ Y_{ijK} \end{pmatrix} & \longleftarrow & \text{N}(\mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij}, \sigma^2) \\
 & I & & & & &
\end{array}
$$

Οι υποθέσεις που ενδιαφέρουν στο μοντέλο αυτό είναι οι εξής:

$H_A : \alpha_i$ =0 $\forall i$,

$H_B : \beta_j$ =0 $\forall j$,

$H_{AB} : (\alpha\beta)_{ij}$ =0 $\forall i, j$.

Επειδή οι παράμετροι του μοντέλου δεν είναι μονοσήμαντα ορισμένοι, θέτουμε μ_{ijk} =Ε(Y_{ijk})= $\mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij}$, $k = 1,\ldots,K$

και εισάγουμε τους παρακάτω περιορισμούς:

$\sum_i \alpha_i = 0$, $\sum_i (\alpha\beta)_{ij} = 0$, □ $j = 1,\ldots,J$

$\sum_j \beta_j = 0$, $\sum_j (\alpha\beta)_{ij} = 0,$ □ $i = 1,\ldots,I$.

<u>Ορισμός Παραμέτρων:</u>

Αθροίζοντας τη σχέση $\mu_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij}$ ως προς k έχω

$$\mu_{ij.} = K\mu + K\alpha_i + K\beta_j + K(\alpha\beta)_{ij} \Rightarrow \mu_{i..} = JK\mu + JK\alpha_i \Rightarrow \mu_{...} = IJK\mu$$

$$\Rightarrow \mu = \mu_{...} / IJK$$

Ανάλογα έχω ότι $\alpha_i = \bar{\mu}_{i..} - \bar{\mu}_{...}$

$$\beta_j = \bar{\mu}_{.j.} - \bar{\mu}_{...}$$

$$(\alpha\beta)_{ij} = \bar{\mu}_{ij.} - \bar{\mu}_{i..} - \bar{\mu}_{.j.} + \bar{\mu}_{...} .$$

Οι εκτιμήτριες δίνονται από:

$$\hat{\mu} = \bar{Y}_{...}$$

$$\hat{\alpha}_i = \bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{...}$$

$$\hat{\beta}_j = \bar{Y}_{.j.} - \bar{Y}_{...}$$

$$(\alpha\hat{\beta})_{ij} = \bar{Y}_{ij.} - \bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{.j.} + \bar{Y}_{...}$$

Ισχύει η βασική σχέση:

$$\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K}(Y_{ijk} - \bar{Y}_{...})^2 = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K}(Y_{ijk} - \bar{Y}_{ij.})^2 + JK\sum_{i=1}^{I}(\bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{...})^2$$

$$+ IK\sum_{j=1}^{J}(\bar{Y}_{.j.} - \bar{Y}_{...})^2 + K\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}(\bar{Y}_{ij.} - \bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{.j.} + \bar{Y}_{...})^2$$

$$\square \quad \begin{array}{ccccccccc} SS_{tot} & = & SS_{res} & + & SS_A & + & SS_B & + & SS_{AB} \\ IJK-1 & & IJ(K-1) & & (I-1) & & (J-1) & & (I-1)(J-1) \end{array}$$

Πως υπολογίζονται οι βαθμοί ελευθερίας του SS_{res}:

Παρατηρώ ότι $SS_{res}=\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\boxed{\sum_{k=1}^{K}(\ Y_{ijk}\text{ - }\overline{Y}_{ij.}\ )^2}$

αυτό το άθροισμα αντιστοιχεί σε κάθε κυψελίδα. Προσθέτω K όρους και αφαιρώ τη μέση τους τιμή, άρα οι β.ε. είναι K-1. Έχω IJ ανεξάρτητες κυψελίδες, άρα οι β.ε. είναι $IJ(K-1)$.

Γιατί η ποσότητα $\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K}(\ Y_{ijk}\text{ - }\overline{Y}_{ij.}\ )^2$ είναι το άθροισμα τετραγώνων των υπολοίπων;

Αφού $\hat{Y}_{ijk}=\hat{\mu}+\hat{\alpha}_i+\hat{\beta}_j+(\hat{\alpha\beta})_{ij}=\overline{Y}_{ij.}$ έχω ότι

$\sum_i\sum_j\sum_k(Y_{ijk}-\hat{Y}_{ijk})^2=SS_{res}$.

<u>Πρόταση:</u> Για το μοντέλο ΑΝΑΔΙΑ κατά δύο παράγοντες με αλληλεπίδραση, έχω τα εξής:

1) Ε(MS_{res})= σ^2
2) Ε(MS_A)= $\sigma^2+JK\sum_i\alpha_i^2\ /\ (I-1)$
3) Ε(MS_B)= $\sigma^2+IK\sum_j\beta_j^2\ /\ (J-1)$
4) Ε(MS_{AB})= $\sigma^2+K\sum_i\sum_j(\alpha\beta)_{ij}^2\ /\ (I-1)(J-1)$.

<u>Απόδειξη:</u>

1) Ε(SS_{res})= $\sum_i\sum_j\sum_k$ Ε(Y_{ijk} - $\overline{Y}_{ij.}$ $)^2$

Αλλά Ε(Y_{ijk} - $\overline{Y}_{ij.}$)=($\mu+\alpha_i+\beta_j+(\alpha\beta)_{ij}$)-($\mu+\alpha_i+\beta_j+(\alpha\beta)_{ij}$)=0

Var(Y_{ijk} - $\overline{Y}_{ij.}$) = Var(Y_{ijk}) + Var($\overline{Y}_{ij.}$) - 2Cov(Y_{ijk} , $\overline{Y}_{ij.}$)

$$=\sigma^2+\frac{\sigma^2}{K}-\frac{2\sigma^2}{K}=\sigma^2(1-\frac{1}{K})=\frac{K-1}{K}\sigma^2.$$

Άρα Ε(SS_{res})= $\sum_i\sum_j\sum_k\frac{K-1}{K}\ \sigma^2$ $\Rightarrow$ Ε(SS_{res})= $IJ(K-1)$

$\Rightarrow$ MS_{res} είναι αμερόληπτη για σ^2.

2) Ε(SS_A)= $JK\sum_i$ Ε($\overline{Y}_{i..}$ - $\overline{Y}_{...}$ $)^2$

Αλλά Ε($\overline{Y}_{i..}$ - $\overline{Y}_{...}$)=($\mu+\alpha_i$)- $\mu=\alpha_i$

Var($\overline{Y}_{i..}$ - $\overline{Y}_{...}$) = Var($\overline{Y}_{i..}$) + Var($\overline{Y}_{...}$) - 2Cov($\overline{Y}_{i..}$, $\overline{Y}_{...}$)

$$=\frac{\sigma^2}{JK}+\frac{\sigma^2}{IJK}-\frac{2\sigma^2}{IJK}=\frac{\sigma^2}{JK}\frac{(I-1)}{I}.$$

Άρα Ε(SS_A)= $JK\sum_i[\alpha_i^2+\frac{\sigma^2}{JK}\frac{(I-1)}{I}]=JK\sum_{i=1}^{I}\alpha_i^2+(I-1)\sigma^2$

και Ε(MS_A)= $\sigma^2+\frac{JK}{I-1}\sum_{i=1}^{I}\alpha_i^2$.

3) Αποδεικνύεται όπως το (2).

4) E(SS_{AB})= $K\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}$ E($\overline{Y}_{ij.}$ - $\overline{Y}_{i..}$ - $\overline{Y}_{.j.}$ + $\overline{Y}_{...}$)^2

Αλλά E($\overline{Y}_{ij.}$ - $\overline{Y}_{i..}$ - $\overline{Y}_{.j.}$ + $\overline{Y}_{...}$)=($\mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij}$)-($\mu + \alpha_i$)-($\mu + \beta_j$)+ $\mu = (\alpha\beta)_{ij}$

Var($\overline{Y}_{ij.}$ - $\overline{Y}_{i..}$ - $\overline{Y}_{.j.}$ + $\overline{Y}_{...}$) = Var($\overline{Y}_{ij.}$) + Var($\overline{Y}_{i..}$) + Var($\overline{Y}_{.j.}$) + Var($\overline{Y}_{...}$) - 2Cov($\overline{Y}_{ij.}$, $\overline{Y}_{i..}$)

- 2Cov($\overline{Y}_{ij.}$, $\overline{Y}_{.j.}$) + 2Cov($\overline{Y}_{ij.}$, $\overline{Y}_{...}$) + 2Cov($\overline{Y}_{i..}$, $\overline{Y}_{.j.}$) - 2Cov($\overline{Y}_{i..}$, $\overline{Y}_{...}$) - 2Cov($\overline{Y}_{.j.}$, $\overline{Y}_{...}$)

$$= \frac{\sigma^2}{K} + \frac{\sigma^2}{JK} + \frac{\sigma^2}{IK} + \frac{\sigma^2}{IJK} - \frac{2\sigma^2}{JK} - \frac{2\sigma^2}{IK} + \frac{2\sigma^2}{IJK} + \frac{2\sigma^2}{IJK} - \frac{2\sigma^2}{IJK} - \frac{2\sigma^2}{IJK}$$

$$= \sigma^2 \left(\frac{1}{K} - \frac{1}{JK} - \frac{1}{IK} + \frac{1}{IJK}\right) = \sigma^2 \frac{IJ - I - J + 1}{IJK} = \sigma^2 \frac{(I-1)(J-1)}{IJK}.$$

Άρα E(SS_{AB})= σ^2 (I -1)(J -1)+ $K\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}(\alpha\beta)_{ij}^2$

 E(MS_{AB})= $\sigma^2 + \dfrac{K}{(I-1)(J-1)}\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}(\alpha\beta)_{ij}^2$.