Έστω το μοντέλο ΑΝΑΔΙΑ κατά δύο παράγοντες με αλληλεπίδραση. Ισχύει η παρακάτω πρόταση αν $\varepsilon_{ijk} \sim N(0,\sigma^2)$.

Πρόταση:

1) Οι τέσσερεις όροι στους οποίους αναλύεται το ολικό άθροισμα τετραγώνων είναι ανεξάρτητοι μεταξύ τους.
2) $SS_{res}/\sigma^2 \sim \mathrm{X}^2_{IJ(K-1)}$.
3) Όταν ισχύει η H_A , $SS_A/\sigma^2 \sim \mathrm{X}^2_{I-1}$.
4) Όταν ισχύει η H_B , $SS_B/\sigma^2 \sim \mathrm{X}^2_{J-1}$.
5) Όταν ισχύει η H_{AB} , $SS_{AB}/\sigma^2 \sim \mathrm{X}^2_{(I-1)(J-1)}$.

Απόδειξη:

1) Θα δείξουμε ότι SS_A , SS_B , SS_{res} και SS_{AB} είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους. Αρκεί να δείξω ότι είναι ασυσχέτιστα.

$SS_A \square SS_{res}$:

Cov(Y_{ijk} - $\overline{Y}_{ij.}$, $\overline{Y}_{i..}$ - $\overline{Y}_{...}$) = Cov(Y_{ijk} , $\overline{Y}_{i..}$) - Cov(Y_{ijk} , $\overline{Y}_{...}$) - Cov($\overline{Y}_{ij.}$, $\overline{Y}_{i..}$) + Cov($\overline{Y}_{ij.}$, $\overline{Y}_{...}$)

$$= \frac{\sigma^2}{JK} - \frac{\sigma^2}{IJK} - \frac{\sigma^2}{JK} + \frac{\sigma^2}{IJK} = 0$$

$SS_A \square SS_{AB}$:

Cov($\overline{Y}_{i..}$ - $\overline{Y}_{...}$, $\overline{Y}_{ij.}$ - $\overline{Y}_{i..}$ - $\overline{Y}_{.j.}$ + $\overline{Y}_{...}$) = Cov($\overline{Y}_{i..}$, $\overline{Y}_{ij.}$) - Cov($\overline{Y}_{i..}$, $\overline{Y}_{i..}$) - Cov($\overline{Y}_{i..}$, $\overline{Y}_{.j.}$) + Cov($\overline{Y}_{i..}$, $\overline{Y}_{...}$)

- Cov($\overline{Y}_{...}$, $\overline{Y}_{ij.}$) + Cov($\overline{Y}_{...}$, $\overline{Y}_{i..}$) + Cov($\overline{Y}_{...}$, $\overline{Y}_{.j.}$) - Cov($\overline{Y}_{...}$, $\overline{Y}_{...}$)

$$= \frac{\sigma^2}{JK} - \frac{\sigma^2}{JK} - \frac{\sigma^2}{IJK} + \frac{\sigma^2}{IJK} - \frac{\sigma^2}{IJK} + \frac{\sigma^2}{IJK} + \frac{\sigma^2}{IJK} - \frac{\sigma^2}{IJK} = 0.$$

Με εντελώς ανάλογο τρόπο αποδεικνύεται ότι $SS_B \square SS_{res}$, $SS_B \square SS_{AB}$ και $SS_{AB} \square SS_{res}$.

2) Επειδή $SS_{res} = \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} \sum_{k=1}^{K} (Y_{ijk} - \overline{Y}_{ij.})^2$ έχω ότι $\sum_{k} (Y_{ijk} - \overline{Y}_{ij.})^2 / \sigma^2 \sim \mathrm{X}^2_{K-1}$.

Λόγω του ότι οι κυψελίδες είναι ανεξάρτητες, $SS_{res}/\sigma^2 \sim \mathrm{X}^2_{IJ(K-1)}$.

3), 4) Οι αποδείξεις είναι ανάλογες με το προσθετικό μοντέλο.

5) Όταν ισχύει η $H_{AB} : (\alpha\beta)_{ij}$ =0, τότε $Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ijk}$.

Δηλαδή το SS_{AB} έχει την ίδια μορφή με το SS^*_{res} στο προσθετικό μοντέλο, γιατί αν αθροίσω ως προς k έχω

$Z_{ij} = \overline{Y}_{ij.} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \overline{\varepsilon}_{ij.}$, όπου $\overline{\varepsilon}_{ij.}$ ~N(0, σ^2/K).

Άρα $SS^*_{res} = \sum_i \sum_j (Z_{ij} - \overline{Z}_{i.} - \overline{Z}_{.j} + \overline{Z}_{..})^2$

$$= \sum_i \sum_j (\overline{Y}_{ij.} - \overline{Y}_{i..} - \overline{Y}_{.j.} + \overline{Y}_{...})^2$$

οπότε $SS^*_{res}/(\sigma^2/K) \sim \mathrm{X}^2_{(I-1)(J-1)}$.

Όμως $SS_{AB}/\sigma^2 = SS^*_{res}/(\sigma^2/K) \sim \mathrm{X}^2_{(I-1)(J-1)}$

Ελεγχοσυναρτήσεις για τις υποθέσεις ενδιαφέροντος

1) $H_A : \alpha_i = 0 \ \forall i$.

Απορρίπτω την H_A όταν $F_A = \dfrac{MS_A}{MS_{res}} > F_{(I-1);IJ(K-1);a}$.

2) $H_B : \beta_j = 0 \ \forall j$.

Απορρίπτω την H_B όταν $F_B = \dfrac{MS_B}{MS_{res}} > F_{(J-1);IJ(K-1);a}$.

3) $H_{AB} : (\alpha\beta)_{ij} = 0 \ \forall i, j$.

Απορρίπτω την H_{AB} όταν $F_{AB} = \dfrac{MS_{AB}}{MS_{res}} > F_{(I-1)(J-1);IJ(K-1);a}$.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΑΝΑΔΙΑ ΓΙΑ ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΜΕ ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΗ

Παράγων Α	SS_A	I -1	$MS_A = SS_A / (I$ -1)	$F_A = MS_A \,/\, MS_{res}$
Παράγων Β	SS_B	J -1	$MS_B = SS_B / (J$ -1)	$F_B = MS_B \,/\, MS_{res}$
Αλληλεπίδραση	SS_{AB}	$(I$ -1)$(J$ -1)	$MS_{AB} = SS_{AB} / (I$ -1)$(J$ -1)	$F_{AB} = MS_{AB} \,/\, MS_{res}$
Υπόλοιπα	SS_{res}	$I\ J\ (K$ -1)	$MS_{res} = SS_{res} / I\ J\ (K$ -1)	
Ολική Μεταβλητότητα	SS_{tot}	$I\ J\ K$ -1		

Παρατηρήσεις:

1) $H_{AB} : (\alpha\beta)_{ij} = 0$.

Πρέπει να γίνεται πρώτα ο παραπάνω έλεγχος. Εάν γίνει δεκτός τότε συνεχίζουμε με τις H_A, H_B και αν μία από αυτές απορριφθεί τότε μπορούμε να εφαρμόσουμε τη μέθοδο πολλαπλών συγκρίσεων για να δούμε αν υπάρχουν διαφορές ανάμεσα στα επίπεδα του παράγοντα. Εάν απορρίψουμε την H_{AB} τότε είτε μπορούμε να ΜΗΝ ελέγξουμε τις H_A και H_B αφού $\exists (i,j)$: $(\alpha\beta)_{ij} \neq 0$ και συνεπώς και οι δύο παράγοντες επιδρούν, είτε μπορούμε να συνεχίσουμε στον έλεγχο των H_A και H_B. Είναι δυνατόν να απορριφθεί η H_{AB} και να γίνουν δεκτές οι άλλες δύο υποθέσεις.

2) Γενικά μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε περιορισμούς της μορφής:
$\sum w_i a_i = 0$, $\sum u_j \beta_j = 0$, $\sum_i w_i (\alpha\beta)_{ij} = 0, \forall j$, $\sum_j u_j (\alpha\beta)_{ij} = 0, \forall i$.

3) Μοντέλο με αλληλεπίδραση με άνισο αριθμό παρατηρήσεων ανά κυψελίδα.

4) Η μεθοδολογία της ΑΝΑΔΙΑ γενικεύεται για 3 και παραπάνω παράγοντες.