Γραμμικοί Χώροι - Προβολές

1) Βασικός γραμμικός χώρος $\Re^n$.
   (το n θα συμβολίζει τον αριθμό των παρατηρήσεων $Y_1,...,Y_n$)
2) Γραμμικός υπόχωρος $V \subseteq \Re^n$
   Γνήσια γραμμικός υπόχωρος του $\Re$: το μονοσύνολο 0.
   Γνήσια γραμμικός υπόχωρος του $\Re^2$: κάθε ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Ειδικοί υπόχωροι:

1) Έστω $\underline{v} \in \Re^n$, $V = <\underline{v}> = \{\lambda \underline{v}, \lambda \in \Re\}$.
2) Έστω $\underline{v}_1,...,\underline{v}_p \in \Re^n$, $V = <\underline{v}_1,...,\underline{v}_p> = \{\underline{v} = \sum_{i=1}^{p} a_i \underline{v}_i, a_i \in \Re\}$, όλοι οι γραμμικοί συνδυασμοί των $\underline{v}_1,...,\underline{v}_p$.

Ισοδύναμα, $V = \{\underline{v} = \underbrace{(\underline{v}_1,...,\underline{v}_p)}_{\mathrm{X}} \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix}}_{\underline{a}}, a_i \in \Re\} = \{\underline{v} = \mathrm{X}\underline{a}, \underline{a} \in \Re^p\}$.

Αν τα $\underline{v}_1,...,\underline{v}_p$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα τότε ο πίνακας X ονομάζεται πίνακας βάσης του V με $\dim V = p$.

Άρα rank(X)=dim$V = p$ και $(\mathrm{X}^T\mathrm{X})$ είναι θετικά ορισμένος.

Εάν $\underline{v} \in V$ και X είναι πίνακας βάσης τότε $\underline{v} = \mathrm{X}\underline{a}$, όπου το διάνυσμα $\underline{a}$ είναι μοναδικά ορισμένο.

Αφού $\underline{v} = \mathrm{X}\underline{a} \Rightarrow \mathrm{X}^T \underline{v} = (\mathrm{X}^T\mathrm{X})\underline{a} \Rightarrow \underline{v} = (\mathrm{X}^T\mathrm{X})^{-1}\mathrm{X}^T \underline{a}$.

3) Ορθογώνιοι υπόχωροι:

Αν $V, W \subseteq \Re^n$, τότε $V \perp W \Leftrightarrow \underline{v} \perp \underline{w}, \forall \underline{v} \in V, \underline{w} \in W$

$\Leftrightarrow \underline{v}^T \underline{w} = 0, \forall \underline{v} \in V, \underline{w} \in W$.

Ορθογώνιο συμπληρωμα ενός υπόχωρου V : $V^{\perp} = \{\underline{y} \in \Re^n, \underline{y} \perp \underline{v}, \forall \underline{v} \in V\}$

$= \{\underline{y} \in \Re^n, \underline{y}^T \cdot \underline{v} = 0, \forall \underline{v} \in V\}$.

Ισχύει ότι $\Re^n = V \oplus V^{\perp} \Rightarrow \forall \underline{y} \in \Re^n : \underline{y} = \underline{v}_1 + \underline{v}_2, \underline{v}_1 \in V, \underline{v}_2 \in V^{\perp}, \underline{v}_1, \underline{v}_2 \neq \underline{0}$.

Έστω $V, W \subseteq \Re^n$, υπόχωροι, ‘ετσι ώστε $W \subseteq V \subseteq \Re^n$.

Το ορθογώνιο συμπήρωμα του V ως προς W: $V/W = \{\underline{v} \in V : \underline{v} \perp W\}$.

Έχουμε ότι $V = W \oplus V/W$, και $V^{\perp} = \Re^n / V$.

Πρόταση #1: $V^{\perp}$ και V/W είναι γραμμικοί υπόχωροι.

Πρόταση #2:
Εάν $V \subseteq \Re^n$ υπόχωρος, X είναι $n \times p$ πίνακας βάσης του V και $\underline{y} \perp V \Rightarrow \mathrm{X}^T \cdot \underline{y} = 0$

Ορισμός: Έστω $\underline{y} \in \Re^n$. Η προβολή του $\underline{y}$ στον υπόχωρο V είναι ένα διάνυσμα που ικανοποιεί:
1) $\underline{v} \in V$
2) $\underline{y} - \underline{v} \perp V$

Πρόταση #3:

1) Η προβολή υπάρχει και είναι μοναδική.
2) Αν X είναι πίνακας βάσης του χώρου V, τότε η προβολή του $\underline{y} \in \Re^n$ είναι $\mathrm{X}(\mathrm{X}^T\mathrm{X})^{-1}\mathrm{X}^T \underline{y}$.
3) Η προβολή δεν εξαρτάται από τον πίνακα βάσης.

Απόδειξη του 2) μόνο:

Ζητάμε κάποιο $\underline{v}$ έτσι ώστε: 1) $\underline{v} \in V$, 2) $\underline{y} - \underline{v} \perp V$.

Αφού $\underline{v} \in V$ έχω ότι $\exists \underline{a}: \underline{v} = \mathrm{X}\underline{a}, \underline{a} \in \Re^p$.

Όμως $\underline{y} - \mathrm{X}\underline{a} \perp V \overset{\pi\rho o\tau\alpha\sigma\eta}{\underset{\#2}{\Rightarrow}} \mathrm{X}^T(\underline{y} - \mathrm{X}\underline{a}) = \underline{0} \Rightarrow \mathrm{X}^T\underline{y} - \mathrm{X}^T\mathrm{X}\underline{a} = 0 \Rightarrow$

$\mathrm{X}^T\underline{y} = \mathrm{X}^T\mathrm{X}\underline{a} \Rightarrow \underline{a} = (\mathrm{X}^T\mathrm{X})^{-1}\mathrm{X}^T\underline{y}$.

Συνεπώς $\underline{v} = \underbrace{\mathrm{X}(\mathrm{X}^T\mathrm{X})^{-1}\mathrm{X}^T}_{n\times n}\underline{y} = \mathrm{P}_V\underline{y}$.

Ο πίνακας P_V ονομάζεται πίνακας προβολής.

Ιδιότητες του πίνακα Προβολής

1) $\mathrm{P}_V{}^T = \mathrm{P}_V$
2) $\mathrm{P}_V{}^2 = \mathrm{P}_V$
3) Είναι ιδιάζων και rank(P_V)=dim(V)= p
4) Δεν εξαρτάται από τη βάση που θα χρησιμοποιηθεί, δηλαδή αν $\mathrm{X}^{(1)}$ και $\mathrm{X}^{(2)}$ είναι πίνακες βάσης του V
   $\mathrm{P}_V = \mathrm{X}^{(1)}(\mathrm{X}^{(1)T}\,\mathrm{X}^{(1)})^{-1}\mathrm{X}^{(1)T} = \mathrm{X}^{(2)}(\mathrm{X}^{(2)T}\,\mathrm{X}^{(2)})^{-1}\mathrm{X}^{(2)T}$
5) Αν $V_1 \perp V_2 \Rightarrow \mathrm{P}_{V_1} \cdot \mathrm{P}_{V_2} = \underline{0}$

Ιδιότητες της Προβολής:

1) $\mathrm{P}_{V^\perp}\underline{y} = \underline{y} - \mathrm{P}_V\underline{y} \Leftrightarrow \underline{y} = \mathrm{P}_V\underline{y} + \mathrm{P}_{V^\perp}\underline{y}$
2) $\|\underline{y}\|^2 = \|\mathrm{P}_V\underline{y}\|^2 + \|\mathrm{P}_{V^\perp}\underline{y}\|^2 \Leftrightarrow \|\mathrm{P}_{V^\perp}\underline{y}\|^2 = \|\underline{y}\|^2 - \|\mathrm{P}_V\underline{y}\|^2$
   $\Leftrightarrow \|\mathrm{P}_{V^\perp}\underline{y}\|^2 = \|\underline{y} - \mathrm{P}_V\underline{y}\|^2 = \|\underline{y}\|^2 - \|\mathrm{P}_V\underline{y}\|^2$
3) $\mathrm{P}_V\underline{y} = \underline{y} \Leftrightarrow \underline{y} \in V$
   $\mathrm{P}_V\underline{y} = \underline{0} \Leftrightarrow \underline{y} \in V^\perp$
4) Αν $\Re^n = V_1 \oplus V_2 \oplus \ldots \oplus V_k$ }
   όπου $V_i \perp V_j, i \neq j$ } $\Leftrightarrow$ $\underline{y} = \mathrm{P}_{V_1}\underline{y} + \ldots + \mathrm{P}_{V_k}\underline{y}$
5) Γενικότερα, αν $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \ldots \oplus V_k$, τότε $\mathrm{P}_V\underline{y} = \mathrm{P}_{V_1}\underline{y} + \ldots + \mathrm{P}_{V_k}\underline{y}$.
6) $\|\underline{y} - \mathrm{P}_V\underline{y}\|^2 = \min\limits_{\underline{v}\in V}\|\underline{y} - \underline{v}\|^2$.
   Άρα $\|\underline{y} - \mathrm{P}_V\underline{y}\| \leq \|\underline{y} - \underline{v}\|^2 \quad \forall \underline{v} \in V$ και ισότητα επιτυγχάνεται όταν $\underline{v} = \mathrm{P}_V\underline{y}$.
7) $\mathrm{P}_V(\underline{y}_1 + \underline{y}_2) = \mathrm{P}_V\underline{y}_1 + \mathrm{P}_V\underline{y}_2$
8) $\mathrm{P}_{V/W}\underline{y} = \mathrm{P}_V\underline{y} - \mathrm{P}_W\underline{y}$ και $\|\mathrm{P}_{V/W}\underline{y}\|^2 = \|\mathrm{P}_V\underline{y}\|^2 - \|\mathrm{P}_W\underline{y}\|^2$
9) Αν $\mathrm{X} = (\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_p)$ είναι ορθογώνιος πίνακας βάσης του V (δηλαδή $\underline{v}_i^T \cdot \underline{v}_j = 0, \forall i \neq j$) τότε $\mathrm{P}_V\underline{y} = \sum_{i=1}^{p}\left(\dfrac{\underline{v}_i^T\underline{y}}{\underline{v}_i^T\underline{v}_i}\right)\underline{v}_i$

10) Ειδικά για $p=1$, η 9) γίνεται $\mathrm{P}_V \underline{y} = \left(\dfrac{\underline{v}_i^T \underline{y}}{\underline{v}_i^T \underline{v}_i} \right) \underline{v}_i$

<u>Απόδειξη:</u>

6) Έστω $\underline{v} \in V$. Τότε $\| \underline{y} - \underline{v} \|^2 = \| \underline{y} - \mathrm{P}_V \underline{y} + \mathrm{P}_V \underline{y} - \underline{v} \|^2 = \| \mathrm{P}_{V^\perp} \underline{y} + \mathrm{P}_V \underline{y} - \underline{v} \|^2$

$= \| \mathrm{P}_{V^\perp} \underline{y} \|^2 + \| \mathrm{P}_V \underline{y} - \underline{v} \|^2$, αφού $\mathrm{P}_V \underline{y} - \underline{v} \in V$.

Άρα, $\| \underline{y} - \underline{v} \|^2 = \| \mathrm{P}_{V^\perp} \underline{y} \|^2 + \| \mathrm{P}_V \underline{y} - \underline{v} \|^2 \geq \| \mathrm{P}_{V^\perp} \underline{y} \|^2 = \| \underline{y} - \mathrm{P}_V \underline{y} \|^2 \quad \forall \underline{v} \in V$.

Συνεπώς, $\min\limits_{\underline{v} \in V} \| \underline{y} - \underline{v} \|^2 = \| \underline{y} - \mathrm{P}_V \underline{y} \|^2$, και η ισότητα ισχύει αν $\underline{v} = \mathrm{P}_V \underline{y}$.

9) $\mathrm{P}_V \underline{y} \in V$ □ $\mathrm{P}_V \underline{y} = \sum\limits_{i=1}^{p} a_i \underline{v}_i$.

Όμως, $\underline{y} = \mathrm{P}_V \underline{y} + \mathrm{P}_{V^\perp} \underline{y}$ □ $\underline{y} = \sum\limits_i a_i \underline{v}_i + \mathrm{P}_{V^\perp} \underline{y}$

□ $\underline{v}_j^T \cdot \underline{y} = a_j \underline{v}_j^T \underline{v}_j + 0$ □ $a_j = \dfrac{\underline{v}_j^T \underline{y}}{\underline{v}_j^T \underline{v}_j}$.

Άρα $\mathrm{P}_V \underline{y} = \sum\limits_{i=1}^{p} \left(\dfrac{\underline{v}_i^T \underline{y}}{\underline{v}_i^T \underline{v}_i} \right) \underline{v}_i$.

<u>Προβολές:</u> Έστω $\underline{Y} \sim N_n(\underline{\mu}, \sigma^2 I)$, $\sigma^2 > 0$ και έστω V, W γραμμικοί υπόχωροι του $\Re^n$, $V \perp W$.

Ισχύει:

1) $\mathrm{P}_V \underline{y} \sim N_p(\mathrm{P}_V \underline{\mu}, \sigma^2 \mathrm{P}_V)$
2) $\mathrm{P}_V \underline{y}$ και $\mathrm{P}_W \underline{y}$ είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές.