Έστω το γενικό γραμμικό μοντέλο $\underline{y} = \underline{\mu} + \underline{\varepsilon}$, , $\underline{\mu} \in V \subseteq \Re^n$, $\dim V = p < n$, και $\underline{\varepsilon} \sim N_n(0, \sigma^2 I)$, $\sigma^2 > 0$.

Για τον έλεγχο $H_0: \underline{\mu} \in W$ } όπου W διανυσματικός υπόχωρος του V

$H_1: \underline{\mu} \notin W$ } με διάσταση $k < p$

θεωρώ την ελεγχοσυνάρτηση $F = \dfrac{\|\mathrm{P}_{V/W}\underline{y}\|^2/(p-k)}{\|\mathrm{P}_{V^\perp}\underline{y}\|^2/(n-p)}$.

Παρατηρούμε ότι $\|\mathrm{P}_{V^\perp}\underline{y}\|^2 = \|\underline{y} - \mathrm{P}_V\underline{y}\|^2 = \|\underline{y} - \underline{\hat{\mu}}\|^2 = \|\underline{y} - \underline{\hat{y}}\|^2 = SS_{res}(\Pi M)$

Ο αριθμητής είναι $\|\mathrm{P}_{V/W}\underline{y}\|^2 = \|\mathrm{P}_V\underline{y} - \mathrm{P}_W\underline{y}\|^2 = \|\underline{\hat{\mu}} - \underline{\hat{\hat{\mu}}}\|^2$

όπου $\underline{\hat{\mu}} = \mathrm{P}_V\underline{y}$ εκτιμήτρια ελαχίστων τετραγώνων όταν ισχύει το πλήρες μοντέλο

και $\underline{\hat{\hat{\mu}}} = \mathrm{P}_W\underline{y}$ εκτιμήτρια ελαχίστων τετραγώνων όταν ισχύει η H_0.

Ο παραπάνω έλεγχος είναι ισοδύναμος με την ελεγχοσυνάρτηση

$$F = \frac{(SS_{res}(H_0 M) - SS_{res}(\Pi M))/\beta.\varepsilon.}{SS_{res}(\Pi M)/\beta.\varepsilon.}$$, αφού

$SS_{res}(H_0 M) - SS_{res}(\Pi M) = \|\underline{y} - \mathrm{P}_W\underline{y}\|^2 - \|\underline{y} - \mathrm{P}_V\underline{y}\|^2$

$$\overset{\iota\delta\iota o\tau\eta\tau\varepsilon\varsigma}{=} \|\underline{y}\|^2 - \|\mathrm{P}_W\underline{y}\|^2 - \|\underline{y}\|^2 + \|\mathrm{P}_V\underline{y}\|^2 = \|\mathrm{P}_V\underline{y}\|^2 - \|\mathrm{P}_W\underline{y}\|^2 \overset{\iota\delta\iota o\tau\eta\tau\varepsilon\varsigma}{=} \|\mathrm{P}_{V/W}\underline{y}\|^2$$

<u>Ο γενικός πίνακας ΑΝΑΔΙΑ έχει ως εξής:</u>

Υπόχωρος (πηγή μεταβλ.)	Αθρ. Τετρ. (Προβολές)	β.ε. Διαστάσεις	Μέσα Τετράγωνα	F
(H_0) W	$\|\mathrm{P}_W\underline{y}\|^2$	dim(W)= k	$MS_W = \dfrac{\|\mathrm{P}_W\underline{y}\|^2}{k}$	
(απόκλιση από W) V/W	$\|\mathrm{P}_{V/W}\underline{y}\|^2$	dim(V/W) $= p-k$	$MS_{V/W} = \dfrac{\|\mathrm{P}_{V/W}\underline{y}\|^2}{p-k}$	$\dfrac{MS_{V/W}}{MS_{V^\perp}}$
(πλήρης) V	$\|\mathrm{P}_V\underline{y}\|^2$	dim(V)= p	$MS_V = \dfrac{\|\mathrm{P}_V\underline{y}\|^2}{p}$	
(σφάλμα) $V^\perp$	$\|\mathrm{P}_{V^\perp}\underline{y}\|^2$	dim($V^\perp$) $= n-p$	$MS_{V^\perp} = \dfrac{\|\mathrm{P}_{V^\perp}\underline{y}\|^2}{n-p}$	
$\Re^n$	$\|\underline{y}\|^2$	n		

<u>Εφαρμογή:</u>

Ανάλυση της Διακύμανσης κατά ένα παράγοντα:

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij},\ \varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2),\ \sum_{i=1}^{I} n_i \alpha_i = 0.$$

H_0: $\alpha_i = 0$, □ $i = 1, \ldots, I$.

Έστω $n = \sum_{i=1}^{I} n_i$,

$$\underline{y}=\begin{pmatrix} y_{11} \\ \vdots \\ y_{1n_1} \\ \hline \vdots \\ \hline y_{I1} \\ \vdots \\ y_{In_I} \end{pmatrix},\ \underline{\mu}=\begin{pmatrix} \left.\begin{matrix}\mu+a_1 \\ \vdots \\ \mu+a_1\end{matrix}\right\}n_1 \\ \hline \vdots \\ \hline \left.\begin{matrix}\mu+a_I \\ \vdots \\ \mu+a_I\end{matrix}\right\}n_I \end{pmatrix}.$$

Βλέπω ότι $\underline{\mu}=\mu\ \underline{1}+\alpha_1\begin{pmatrix} \left.\begin{matrix}1 \\ \vdots \\ 1\end{matrix}\right\}n_1 \\ \hline 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}+\ldots+\alpha_I\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \hline \left.\begin{matrix}1 \\ \vdots \\ 1\end{matrix}\right\}n_I \end{pmatrix}=\mu\ \underline{1}+a_1\underline{v}_1+\ldots+a_I\underline{v}_I$.

Παρατηρώ ότι τα $\underline{v}_i$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα και ορθογώνια.
Επομένως $\dim(V)=I$
Όταν ισχύει η H_0 έχω $\alpha_i=0$, $\forall i$, άρα $\underline{\mu}=\mu\cdot\underline{1}\in<\underline{1}>=W$ με $\dim(W)=1$

Θα υπολογίσω τις προβολές:

$$\mathrm{P}_V\,\underline{y}=\sum_{i=1}^{I}\left(\frac{\underline{v}_i^T\cdot\underline{y}}{\underline{v}_i^T\cdot\underline{v}_i}\right)\underline{v}_i=\sum_{i=1}^{I}\frac{Y_{i.}}{n_i}\underline{v}_i=\sum_{i=1}^{I}\overline{Y}_{i.}\underline{v}_i=\begin{pmatrix} \left.\begin{matrix}\overline{Y}_{1.} \\ \vdots \\ \overline{Y}_{1.}\end{matrix}\right\}n_1 \\ \hline \vdots \\ \hline \left.\begin{matrix}\overline{Y}_{I.} \\ \vdots \\ \overline{Y}_{I.}\end{matrix}\right\}n_I \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{P}_W\,\underline{y}=\left(\frac{\underline{1}^T\cdot\underline{y}}{\underline{1}^T\cdot\underline{1}}\right)\underline{1}=\frac{Y_{..}}{n}\cdot\underline{1}=\overline{Y}_{..}\cdot\underline{1}=\begin{pmatrix}\overline{Y}_{..} \\ \vdots \\ \overline{Y}_{..}\end{pmatrix}$$

και $\mathrm{P}_V\,\underline{y}-\mathrm{P}_W\,\underline{y}=\begin{pmatrix} \left.\begin{matrix}\overline{Y}_{1.}-\overline{Y}_{..} \\ \vdots \\ \overline{Y}_{1.}-\overline{Y}_{..}\end{matrix}\right\}n_1 \\ \hline \vdots \\ \hline \left.\begin{matrix}\overline{Y}_{I.}-\overline{Y}_{..} \\ \vdots \\ \overline{Y}_{I.}-\overline{Y}_{..}\end{matrix}\right\}n_I \end{pmatrix}$

Επίσης $P_{V^\perp}\underline{y} = \underline{y} - P_V\underline{y} = \begin{pmatrix} \left.\begin{matrix} Y_{11} - \overline{Y}_{1.} \\ \vdots \\ Y_{1n_1} - \overline{Y}_{1..} \end{matrix}\right\} n_1 \\ \hline \vdots \\ \hline \left.\begin{matrix} Y_{I1} - \overline{Y}_{I.} \\ \vdots \\ Y_{In_I} - \overline{Y}_{I.} \end{matrix}\right\} n_I \end{pmatrix}$.

Άρα $\quad \| P_{V/W}\underline{y} \|^2 = \sum_{i=1}^{I} n_i (\overline{Y}_{i.} - \overline{Y}_{..})^2$

$$\| P_{V^\perp}\underline{y} \|^2 = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{n_i} (Y_{ij} - \overline{Y}_{i.})^2$$

Άρα $\quad F = \dfrac{\sum_{i=1}^{I} n_i (\overline{Y}_{i.} - \overline{Y}_{..})^2 / (I-1)}{\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{n_i} (Y_{ij} - \overline{Y}_{i.})^2 / (n-I)} \sim F_{I-1;n-I}$, όταν ισχύει η H_0 .

<u>Παρατήρηση:</u> Οποιοσδήποτε περιορισμός $\sum w_i a_i = 0$, δεν θα είχε αλλάξει το αποτέλεσμα.